Über die Coriolis- und die Fliehkraft

Herleitung:

Ein inneres Bezugssystem 0, z. B. die Erde, rotiere mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor ω in einem äußeren Bezugssystem 1. Wenn sich ein Massenpunkt im inneren System an der Position $\boldsymbol{r}$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ bewegt. dann hat er im äußeren System die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \omega \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 + \omega \times \boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Welche Beschleunigung und damit welche Kraft wirkt auf ihn in den beiden Systemen?

Es gilt analog zu (1) im äußeren Bezugssystem

$$\boldsymbol{a}_1 \equiv \left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \omega \times v_1. \tag{2}$$

Darin ist (bei konstantem ω)

$$\left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}(\omega \times r)}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \boldsymbol{a}_0 + \omega \times \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \boldsymbol{a}_0 + \omega \times \boldsymbol{v}_0 \tag{3}$$

und – mit (1) –

$$\omega \times \boldsymbol{v}_1 = \omega \times \boldsymbol{v}_0 + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r})\,. \tag{4}$$

Insgesamt ist damit – aufgelöst nach der Beschleunigung im inneren, rotierenden System –

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}_1 - 2\,(\omega \times \boldsymbol{v}_0) - \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}). \tag{5}$$

Im rotierenden System wird also die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_0$ ergänzt durch zwei Terme:

- Die Coriolis-Beschleunigung $-2\,(\omega \times \boldsymbol{v}_0)$ hat eine Abweichung im rechten Winkel zur Drehachse und zur Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem zur Folge.

- Die Zentrifugalbeschleunigung $-\omega \times (\omega \times \boldsymbol{r})$ wirkt im rechten Winkel zur Drehachse nach außen. Auf der Erde mit dem Radius R hat sie bei der Breite ϑ den Betrag $\omega^2 R \cos\vartheta$.

Beispiel: Bewegungen auf der Erdoberfläche

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde sei

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Von Interesse ist hier hauptsächlich die horizontale Komponente der Coriolis-Kraft bei horizontalen Bewegungen. Da sie im rechten Winkel zum (radialen) Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ stehen, gilt

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = 0. \tag{7}$$

Wenn man von der Coriolis-Beschleunigung die Radialkomponente abzieht, erhält man die Horizontalkomponente.

Ich gehe von einem Punkt auf der Erdoberfläche auf der x-Achse aus (siehe Abb. 1 auf Seite 3). Seine Koordinaten sind – bei einem Erdradius 1 –

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Dort bewege sich ein Massenpunkt horizontal, nämlich senkrecht zur x-Achse, mit der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = v \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{9}$$

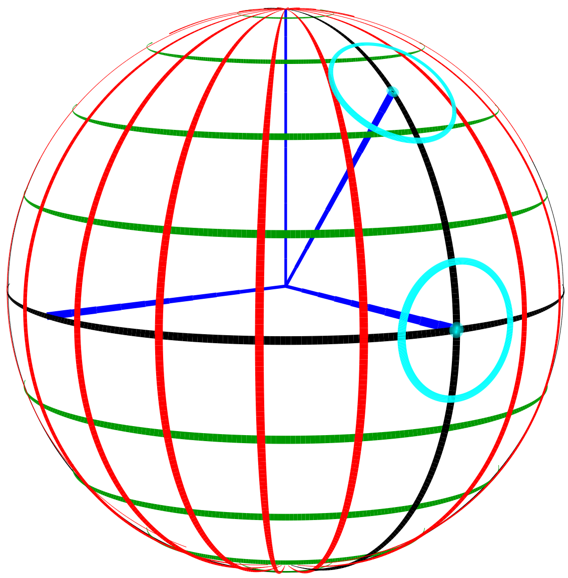

Abbildung 1: Horizontebenen, hier dargestellt durch türkisfarbene Kreise, stehen senkrecht auf dem (radialen) Ortsvektor. Untersucht werden soll hier die Komponente der Coriolis-Kraft in solcher Ebene.

Sie erfüllt (7) und ist also horizontal. Jetzt drehe ich den Punkt zusammen mit der Geschwindigkeit um die y-Achse auf die Breite ϑ und erhalte

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \tag{10}$$

und die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_1 = v \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \cos\vartheta\sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Sie bleibt horizontal, denn es gilt

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 = v \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \cos\vartheta\sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} = 0. \tag{12}$$

Die Coriolis-Kraft ist an diesem Ort

$$\begin{aligned} F_\mathrm{c} &= -2m\,\vec{\omega} \times \boldsymbol{v}_1 \\ &= -2m\omega v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \cos\vartheta\sin\alpha \end{pmatrix} = 2m\omega v \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\vartheta\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Um ihre Horizontalkomponente $F_{\mathrm{c,hor}}$ zu erhalten, subtrahiere ich die Radialkomponente

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{c,rad}} = F_\mathrm{c} \cdot \boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{r}_1 &= 2m\omega v \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\vartheta\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \\ &= 2m\omega v \cos\alpha\cos\vartheta \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Differenz aus (13) und (14) ergibt den horizontalen Anteil der Coriolis-Kraft

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\mathrm{c,hor}} = \boldsymbol{F}_\mathrm{c} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{c,rad}} = 2m\,\omega\,v\sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\vartheta \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix}}. \tag{15}$$

Dieser horizontale Anteil der Coriolis-Kraft hat den Betrag

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{F}_{\mathrm{c,hor}}| &= 2m\,\omega\,v|\sin\vartheta|\left(\cos^2\alpha\sin^2\vartheta + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\vartheta\right) \\ &= 2m\,\omega\,v|\sin\vartheta|\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = 2m\,\omega\,v|\sin\vartheta|. \end{aligned} \tag{16}$$

Ergebnis:
Der Betrag des horizontalen Anteils der Coriolis-Kraft ist unabhängig vom Winkel α, also **unabhängig von der Richtung der Geschwindigkeit**. Daher wird die Luft bei ihrer Bewegung um ein Tief gleichmäßig seitlich abgelenkt. Der Horizontalanteil ist Null am Äquator ($\vartheta = 0$), und ihr Betrag nimmt zu den Polen hin im Sinn einer Sinuskurve stetig zu.

In welcher Richtung wirkt die horizontale Coriolis-Kraft?
Sie wirkt auch in der Horizontalen immer im rechten Winkel zur Geschwindigkeit. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{c,hor}} \cdot \boldsymbol{v}_1 &= 2m\omega v \sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\vartheta \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\vartheta \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= 2m\omega v \sin\vartheta \left(-\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\vartheta + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\vartheta\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Lenkt sie dabei nach rechts oder nach links ab?
Ich bilde dazu das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} \equiv \boldsymbol{F}_{\mathrm{c,hor}} \times \boldsymbol{v}_1 &= 2m\omega v \sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\vartheta \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\vartheta \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= 2m\omega v \sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} = 2m\omega v \sin\vartheta\, \boldsymbol{r}_1.\end{aligned} \tag{18}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{F}_{\mathsf{c,hor}}$, $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{K}$ bilden – in dieser Reihenfolge – ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem. Auf der Nordhalbkugel ($\vartheta > 0$) hat, wie Gleichung (18) zeigt, $\boldsymbol{K}$ die Richtung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_1$. Von oben auf die Horizontebene gesehen erscheint die Coriolis-Kraft daher rechts vom Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_1$. Entsprechend lenkt sie also nach rechts ab.

Auf der Südhalbkugel ($\vartheta < 0$) ist $\boldsymbol{K}$ dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}_1$ entgegengerichtet. Dementsprechend liegt $\boldsymbol{F}_{\mathsf{c,hor}}$ bei der gleichen Betrachtung jetzt links vom Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_1$ und erzeugt dort eine Linksablenkung.

Am Äquator ($\vartheta = 0$) ist die horizontale Coriolis-Kraft, wie schon Gleichung (15) zeigt, gleich dem Nullvektor, und es gibt dort keine Ablenkung.

Zahlenbeispiel:
Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist $\omega = 7.292 \cdot 10^{-5}/\,\mathsf{s}$. Bei einer Breite $\vartheta = 60$ Grad beträgt die Fliehbeschleunigung 0.017 m/s^2. Das liegt im Promillebereich der Erdbeschleunigung. Eine Masse von 100 kg wiegt dadurch scheinbar so viel, als wenn sie 17 g geringer wäre.

Ein Flugzeug, das dort mit Schallgeschwindigkeit fliegt, spürt eine Coriolis-Beschleunigung der Stärke $2\omega v \sin\vartheta = 0.04$ m/s^2. Auch dies ist im Promillebereich der Erdbeschleunigung. Dem kann leicht gegengesteuert werden, so daß dieser Effekt kaum bemerkt wird.

Anders sind die Verhältnisse bei den Luftströmungen. Hier steht der horizontalen Coriolis-Beschleunigung keine Kraft entgegen, und es entsteht die bekannte Spiralbewegung der Luft um ein Tiefdruckzentrum.