# Bewegung im Coulomb-Kraftfeld

## Die Frage

Zwei identische Teilchen mit der Ladung $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C und der Masse $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg (nackte Protonen) befinden sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ($v = 0$) in einem Abstand von $10^{-10}$ m voneinander. Unter der Wirkung ihrer Coulomb-Felder streben sie auseinander, was ihre elektrostatische Energie zugunsten ihrer kinetiwschen Energie verringert. Wenn sie sich dabei beschleunigt bewegen, geben sie Energie als elektromagnetische Strahlung ab.

Welche Geschwindigkeit haben sie nach einer Strecke von $10^{-7}$ m?

## Zur Antwort

Ihr gegenseitiger Abstand sei $r(t) = 2x(t)$. Sie stoßen sich gegenseitig ab mit der Coulomb-Kraft

$$F(x(t)) = k\frac{q^2}{4x(t)^2} \tag{1}$$

mit der Coulomb-Konstanten $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) \approx 9 \cdot 10^9$ Nm$^2$/C$^2$ ist. Dabei nehmen sie entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten $\pm\dot{x}(t)$ an.

Jedes von ihnen hat den Impuls $p(t) = m\dot{x}(t)$. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist

$$\dot{p} = F, \tag{2}$$

und dementsprechend gilt mit der Konstanten $a$

$$\ddot{x} = \frac{a}{x^2}. \tag{3}$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\dot{x}$, so wird aus der Gleichung (2) für Kraft bzw. (3) eine Gleichung für Leistung (beide bis auf einen Massefaktor). Man erhält

$$\dot{x}\ddot{x} = a\,\frac{\dot{x}}{x^2} \tag{4}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{x} - \frac{a}{x}\right) = 0. \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$\dot{x} - \frac{a}{x} = b. \tag{6}$$

Damit gilt für die gesuchte Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ als Funktion der zurückgelegten Strecke $x$

$$\boxed{v(x) = \frac{a}{x} + b} \tag{7}$$

Sie enthält die beiden Konstanten $a$ und $b$. Die Konstante $a$ stammt aus der Coulomb-Gleichung (1). Die andere Konstante $b$ ist Integrationskonstante aus (5). Sie ist durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen.

In die Leistungsbgleichung (4) könnte diejenige Leistung aufgenommen werden, die elektromagnetisch abgestrahlt wird, weil die auseinanderfliegenden Protonen sich nicht gleichförmig sondern beschleunigt bewegen. Dieser Verlust[1] ist proportional zu $\ddot{x}^2$, dem Quadrat der Beschleunigung.

Wenn man annimmt, daß dieser Verlust sehr schwach ist, könnte man unter dessen Vernachlässigung näherungsweise aus (7) zunächst die Geschwindigkeit $v(x) = \dot{x}$ und daraus die Beschleunigung

$$\ddot{x}(x) = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{a}{x^2}\,\dot{x} = -\frac{a^2}{x^3} - \frac{ab}{x^2} \tag{8}$$

als Funktion des Ortes $x$ bestimmen, was dann die Dgl. (4) erweitern könnte.

Die so gefundene Ortsabhängigkeit der Beschleunigung $\ddot{x}$ des elektrostatisch abgestoßenen Protons bedeutet für den zu $\ddot{x}^2$ proportionalen Strahlungsverlust, daß er mit $x^4$, also einer recht hohen Potenz der durchlaufenen Strecke $x$, abklingt. Der stärkste Strahlungsverlust geschieht am Bahnanfang, und nur dort wäre er deshalb zu berücksichtigen.

[1] siehe z. B. http://www.delta.tu-dortmund.de/cms/de/Studium/Homepage_Weis/Vortraege/Vortrag_Theorie_Synchrotronstrahlung.pdf