Elastischer Stoß zweier Punktmassen

Eindimensionale Bewegung

Ein Teilchen der Masse M treffe mit der Geschwindigkeit w_0 auf ein ruhendes Teilchen der Masse m. Ihr Massenverhältnis sei $k := M/m$. Wie sich beide Teilchen nach dem Stoß bewegen, wird durch die Sätze der Erhaltung des Gesamtimpulses und der kinetischen Energie bestimmt. Das stoßende Teilchen ändert seine Geschwindigkeit auf w. Das gestoßene Teilchen erhält die Geschwindigkeit v. Diese Geschwindigkeiten sollen jetzt berechnet werden.

Impulssatz:

$$\boxed{M w_0 = M w + m v} \quad \Leftrightarrow \quad w_0 - w = \frac{v}{k}. \tag{1}$$

Energiesatz:

$$\boxed{\frac{M}{2} w_0^2 = \frac{M}{2} w^2 + \frac{m}{2} v^2} \quad \Leftrightarrow \quad w_0^2 - w^2 = \frac{v^2}{k} \tag{2}$$

Aus dem Energiesatz (2) ergibt sich, wenn man v aus dem Impulssatz (1) einsetzt und durch $(w_0 - w)$ teilt,

$$\begin{aligned} w &= w_0 \frac{k-1}{k+1} \quad \text{stoßendes Teilchen} && (3) \\ v &= w_0 \frac{2k}{k+1} \quad \text{gestoßenes Teilchen} && (4) \end{aligned}$$

Bei zwei gleichen Teilchen ($k = 1$) wäre $w = 0$ und $v = w_0$. Wenn das stoßende Teilchen doppelt so schwer wäre wie das gestoßene ($k = 2$), dann wäre $w = (1/3)\, w_0$ und vielleicht überraschenderweise $v = (4/3)\, w_0$, also schneller als das stoßende Teilchen.

Interessant sind die folgenden Grenzfälle:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} w &= w_0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} v = 2\, w_0 \quad \text{(sehr leichtes Zielteilchen)} \\ \lim_{1/k\to\infty} w &= -w_0 \quad \text{und} \quad \lim_{1/k\to\infty} v = 0 \quad \text{(Reflektion an schwerem Zielteilchen)} \end{aligned}$$

Energieübertragung: Das stoßende Teilchen der Energie $E_0 := (M/2)w_0^2$ hat nach dem Stoß die kinetische Energie

$$E_1 := \frac{M}{2}\,w^2 = \frac{M}{2}\,w_0^2\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = E_0\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2. \tag{5}$$

Das gestoßene Teilchen erhält die Energie

$$E_2 := \frac{m}{2}\,v^2 = \frac{M}{2k}\,w_0^2\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = E_0\,\frac{4k}{(k+1)^2}. \tag{6}$$

Bei gleichschweren Stoßpartnern ($k = 1$) ist $E_1 = 0$. Das stoßende Teilchen verliert also seine gesamte kinetische Energie. Sie wird als $E_2 = E_0$ vom gestoßenen Teilchen übernommen.

Ist das stoßende Teilchen sehr viel schwerer als das gestoßene, dann strebt E_1 gegen E_0 und E_2 gegen 0. d. h. das stoßende Teilchen behält seine Energie.

Ein anderes Lösungsverfahren: Wenn man (1) in (2) einsetzt, erhält man für den Betrag der Geschwindigkeit w des stoßenden Teilchen nach dem Stoß die quadratische Gleichung

$$\boxed{w^2 - 2\,\frac{k}{k+1}\,w_0 w + \frac{k-1}{k+1}\,w_0^2 = 0.} \tag{7}$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$w = \frac{w_0}{k+1}\,(k \pm 1) = w_0 \begin{cases} 1, \\ \dfrac{k-1}{k+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Damit und mit (2) wird der Betrag der Geschwindigkeit des gestoßenen Teilchen

$$v = w_0\,\frac{k}{k+1} \begin{cases} 0, \\ 2. \end{cases} \tag{9}$$

Die erste der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung (7) beschreibt einen physikalisch unrealistischen 'Stoß' ohne jede Wechselwirkung. Die zweite ist identisch mit derjenigen aus dem ersten Lösungsverfahren auf der vorigen Seite.

Stoß im Zweidimensionalen

Hier soll insbesondere geklärt werden, um welchen Winkel das stoßende Teilchen beim Stoß maximal seine Richtung ändern kann (siehe hierzu Abb. 1). Solch Stoß könnte zwischen zwei Nukleonen im Vakuum stattfinden oder auch zwischen zwei Eishockeypucks, die sich auf dem Eis sehr reibungsarm bewegen. Auch hier bleiben Impuls und Energie erhalten. Die Geschwindigkeiten sind jetzt zweikomponentige Vektoren.

Man hat es hier mit vier Größen zu tun, also etwa je zwei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des stoßenden und zwei des gestoßenen Teilchens nach dem Stoß zu tun, die die Erhaltungssätze erfüllen müssen und dadurch zu bestimmen sind. Alternativ könnten Betrag und Richtung dieser Vektoren bestimmt werden.

Der Impulssatz bietet hierzu zwei lineare Gleichungen und der Energiesatz eine nichtlineare Gleichung. Gäbe man die Richtung des stoßenden Teilchens nach dem Stoß vor, hätte man damit die vierte der erforderlichen Gleichungen.

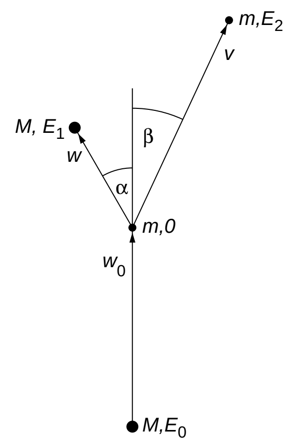

Abbildung 1: Ein Teilchen der Masse $M = 2m$ und der kinetischen Energie E_0 stößt mit der Geschwindigkeit w_0 auf ein ruhendes Teilchen der Masse m. Das stoßende Teilchen verläßt den Stoßort unter dem Winkeln $\alpha = 30$ Grad mit der Geschwindigkeit w, das gestoßene unter und $\beta = 25$ Grad mit der Geschwindigkeit v. Ihre kinetischen Energien sind E_1 und E_2.

Impulssatz:

$$\boxed{M\boldsymbol{w}_0 = M\boldsymbol{w} + m\boldsymbol{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v}}{k}. \tag{10}$$

Energiesatz:

$$\boxed{\frac{M}{2}\,\boldsymbol{w}_0^2 = \frac{M}{2}\,\boldsymbol{w}^2 + \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{w}_0^2 - \boldsymbol{w}^2 = \frac{\boldsymbol{v}^2}{k} \tag{11}$$

Setzt man (10) in (11) ein, dann ergibt sich die Gleichung

$$\boldsymbol{w}_0^2 - \boldsymbol{w}^2 = k\,(\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{w})^2\,, \tag{12}$$

in der zwei Fälle zu unterscheiden sind:

Fall a: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{v} = 0,$

Fall b: $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w}_0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0\,\dfrac{k-1}{k+1}, \quad \boldsymbol{v} = k\,(\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}_0\,\dfrac{2k}{k+1},$

Aus (11) und (10) ergeben sich für die Beträge w und v die gleichen Ausdrücke (3) und (4) wie beim eindimensionalen Stoß. Die Richtungen beider Teilchen nach dem Stoß bleiben dabei noch unbekannt.

Alternative Behandlung der Gleichungen (10) **und** (11)**:** Aus dem Energiesatz (11) wird jetzt anders als im eindimensionalen Fall durch Ausmultiplizieren

$$v^2 = k\,(\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{w})^2 = k\left(w_0^2 - 2w_0 w\cos\alpha + w^2\right), \tag{13}$$

wodurch der Winkel α zwischen $\boldsymbol{w}_0$ und $\boldsymbol{w}$ berücksichtigt wird, der beschreibt, wie sich die Richtung des stoßenden Teilchens beim Stoß ändert. Dies führt bei der Energieerhaltung (11) dann für den Betrag der Geschwindigkeit des stoßenden Teilchen nach dem Stoß auf die quadratische Gleichung

$$\boxed{w^2 - 2\,\frac{k}{k+1}\,w_0\cos\alpha\;w + \frac{k-1}{k+1}\,w_0^2 = 0,} \tag{14}$$

die anders als die quadratische Gleichung (7) jetzt einen Ablenkwinkel α für das stoßende Teilchen enthält.

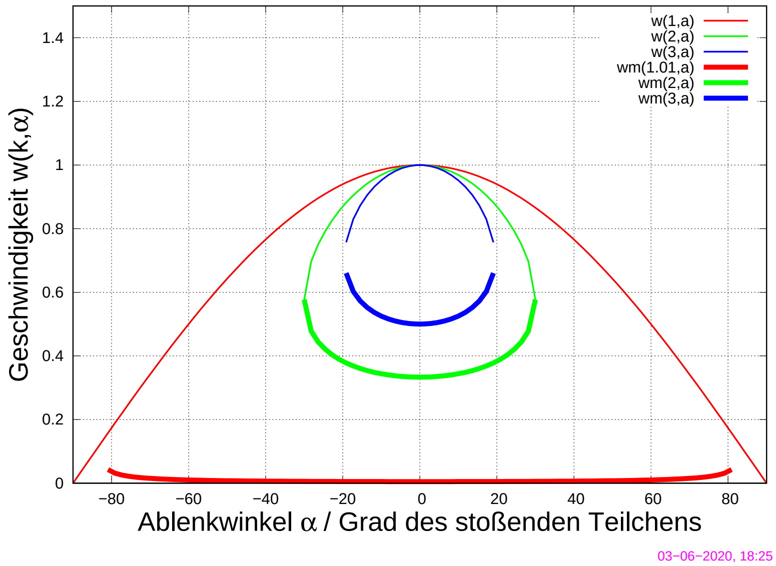

Abbildung 2: Zum Vergleich beider Möglichkeiten in Gleichung (15): Geschwindigkeit des stoßenden Teilchen nach dem Stoß bei verschiedenen Massenverhältnissen k (dünn: w mit oberem, dick: wm mit unterem Vorzeichen).

Sie hat die beiden Lösungen

$$w(k,\alpha) = \frac{w_0}{k+1}\left(k\cos\alpha \pm \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right) \tag{15}$$

Diese beiden Lösungen sind in Abb. 2 einander gegenübergestellt.

Falls das stoßende Teilchen gar nicht abgelenkt wird ($\alpha = 0$), wird

$$w(k,0) = w_0 \begin{cases} 1 \\ \dfrac{k-1}{k+1} \end{cases} \quad \text{und} \quad v(k,0) = w_0 \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2}{k+1} \end{cases} \tag{16}$$

wie beim eindimensionalen Stoß (siehe Abb. 3 auf Seite 6).

Spätestens hier läßt sich erkennen, daß von den beiden Lösungen (15) nur diejenige mit dem Minuszeichen vor der Wurzel den Stoß physikalisch korrekt beschreibt. Zu ihr gehören in (16) die unteren Werte. Die oberen würden der

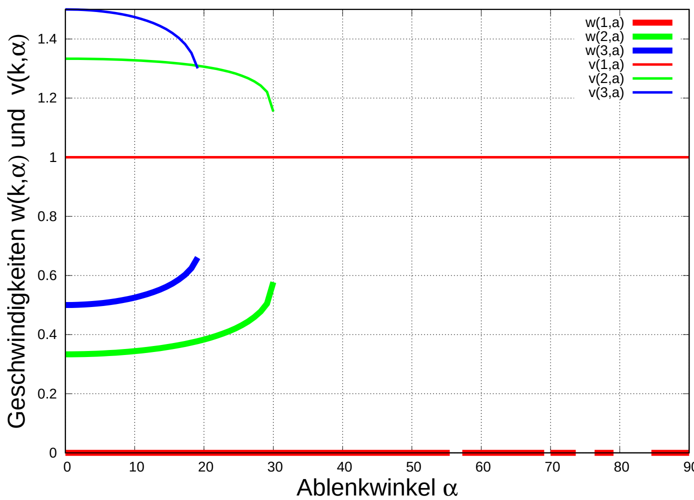

Abbildung 3: Geschwindigkeiten beider Stoßpartner nach dem Stoß in Abhängigkeit vom Ablenkwinkel α des stoßenden Teilchens bei verschiedenen Massenverhältnissen k. Dicke Linien: stoßender, dünne Linien gestoßener Partner.

physikalisch unrealistischen Situation entsprechen, daß das stoßenden Teilchen selbst bei einem zentralen Stoß ohne Wechselwirkung weiterfliegt.

Im Folgenden soll deshalb nur die Lösung mit dem negativen Vorzeichen verwendet werden.

Das gestoßenen leichtere Teilchen erhält mit (11) den Geschwindigkeitsbetrag

$$\begin{aligned} v(k,\alpha) &= \sqrt{k\,(w_0^2 - w^2(k,\alpha))} \\ &= w_0\sqrt{k\left(1-\left(\frac{1}{k+1}\left(k\cos\alpha - \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right)\right)^2\right)} \end{aligned} \tag{17}$$

Die Gleichungen (15) und (17) ergeben nur so lange reelle Geschwindigkeitsbeträge, wie $1 \geq k^2 \sin^2\alpha$ ist und das stoßende deshalb Teilchen z. B. bei einem Massenverhältnis $k = M/m = 2$ um höchsten 30 Grad abgelenkt wird.

Bei diesem maximalen Ablenkwinkel ist

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{1}{k} \quad \longleftrightarrow \quad k \cos \alpha_{\max} = \sqrt{k^2 - 1}. \tag{18}$$

Das stoßende Teilchen behält damit eindeutig die Geschwindigkeit

$$w(k, \alpha_{\max}) = w_0 \, \frac{k}{k+1} \, \cos \alpha_{\max} = w_0 \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}. \tag{19}$$

Das gestoßene Teilchen erhält wegen (17) die Geschwindigkeit

$$v(k, \alpha_{\max}) = w_0 \sqrt{k \left(1 - \left(\frac{k \cos \alpha_{\max}}{k+1}\right)^2\right)} = w_0 \sqrt{\frac{2k}{k+1}}. \tag{20}$$

Auch bei diesem speziellen Ablenkwinkel $\alpha_{\max}$ gilt die Energieerhaltung

$$E_1 + E_2 = \frac{M}{2} \, w^2 + \frac{M}{2k} \, v^2 = \frac{M}{2} \, w_0^2 \left(\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\right) = \frac{M}{2} \, w_0^2 = E_0. \tag{21}$$

Bis hier sind auch hierbei nur die Beträge der Teilchengeschwindigkeiten nach dem Stoß berechnet worden. Wie die Abflugrichtungen beider Stoßpartner zusammenhängen, ist noch zu klären.

Energieaufteilung beim Stoß

Das stoßende Teilchen hat mit (15) nach dem Stoß die kinetische Energie

$$E_1(k, \alpha) \;=\; \frac{M}{2} \, w^2 = \frac{M}{2} \, w_0^2 \left(\frac{k \cos \alpha - \sqrt{1 - (k \sin \alpha)^2}}{k+1}\right)^2 \tag{22}$$

und das gestoßene Teilchen den verbleibenden Rest E_2 seiner Energie E_0.

Beim Ablenkwinkel $\alpha = 0$ wird

$$E_1 = E_0 \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \quad \text{und} \quad E_2 = E_0 \, \frac{1}{k} \left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 \tag{23}$$

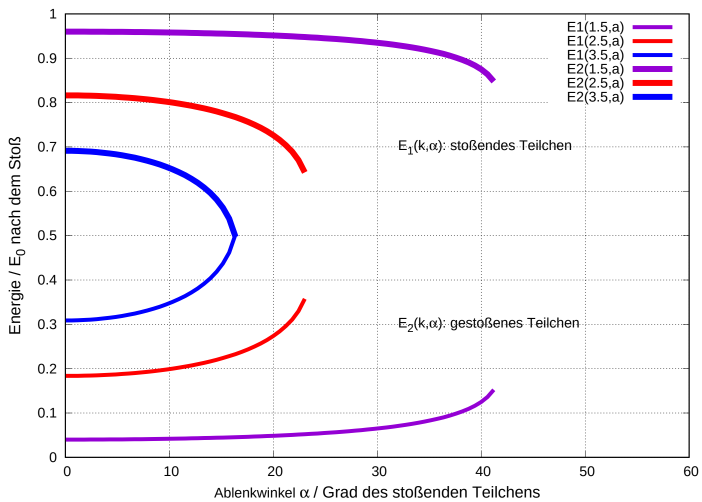

Abbildung 4: Einfluß des Ablenkwinkels α auf die Aufteilung der Energie auf die Stoßpartner nach dem Stoß bei verschiedenen Massenverhältnissen k.

Beim Grenzwinkel $\alpha_{\max}$ hat Gleichung (14) nur eine Lösung $w(k,\alpha)$. Mit ihr ist

$$E_1 = E_0 \, \frac{k-1}{k+1} \quad \text{und} \quad E_2 = E_0 \, \frac{2}{k+1}. \tag{24}$$

Abb. 4 auf Seite 8 zeigt, wie sich bei verschiedenen Massenverhältnissen k die Energie E_0 des stoßenden Teilchens nach dem Stoß aufteilt. Das gestoßene Teilchen erhält um so mehr Energie $E_2(k,\alpha)$, je mehr (bis höchstens $\alpha_{\max}$) das stoßende Teilchen abgelenkt wird.

Um welchen Winkel α dabei das stoßende Teilchen abgelenkt wird, hängt von den Einzelheiten des Stoßes und damit vom Zufall ab.

Beispiele:

Ein schwereres Teilchen stößt ein leichteres, $k := M/m < 1$**:** Dann bleibt der Radikand in den Ausdrücken (15) und (17) auf Seite 4 positiv, und es gibt für beliebige Ablenkwinkel α reelle Beträge von w und v.

Ein leichteres Teilchen stößt ein sehr viel schwereres, $k \ll 1$: Bei maximalem Ablenkwinkel des stoßenden Teilchens wird dann wegen (19) und (20)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0} w &= w_0 \\ \lim_{k\to 0} v &= 0 \end{aligned}$$

Das leichte Teilchen behält dann den Betrag seiner Geschwindigkeit und damit seine kinetische Energie, wobei sich die Richtung aber ändern kann. Das viel schwerere bleibt fast liegen.

Beide Stoßpartner sind gleichschwer, $k = 1$: Dann wird

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ v &= w_0 \end{aligned}$$

Damit wird nach dem Stoß die Energie des stoßenden Teilchens $E_1 = 0$ und die des gestoßenen Teilchens $E_2 = E_0$. Die gesamte kinetische Energie wird also vom gestoßenen Teilchen übernommen.

Das stoßende Teilchen sehr viel schwerer als das gestoßene, $k \gg 1$: Dann wird

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \alpha &= 0 \\ \lim_{k\to\infty} w(k) &= w_0 \\ \lim_{k\to\infty} v(k) &= w_0\sqrt{2} \end{aligned}$$

Wie ist hier die Energieerhaltung gewährleistet? Das leichtere gestoßene Teilchen hat hier zwar nicht die Geschwindigkeit Null. Seine Energie ist aber

$$E_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{M}{2k}\, w_0^2\, \frac{2k}{k+1} = \frac{M\, w_0^2}{k+1} = 0. \tag{25}$$

Ein ^{4}He-Kern stößt einen ^{2}D-Kern, $k = 2$: Er wird beim Stoß maximal um $\alpha_{\max} = 30$ Grad abgelenkt. Mit diesem Winkel wird

$$\begin{aligned} w &= w_0\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad E_1 = \frac{2}{3}\, E_0 \\ v &= 2\, w_0\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad E_2 = \frac{1}{3}\, E_0 \end{aligned}$$

Das gestoßene Teilchen bekommt also halb so viel Energie wie das stoßende behält.

Ein [7]**Li-Kern stößt einen** [2]**D-Kern,** $k = 3.5$**:**

Dabei ist maximale Ablenkwinkel $\alpha = 16.6$ Grad. Mit (19) und (20) wir bei diesem Winkel das stoßende Teilchen auf $w = \sqrt{5/9}\, w_0 \approx 0.745\ w_0$ verlangsamt. Das gestoßene Teilchen wird mit $v = \sqrt{14/9}\, w_0 \approx 1.247\ w_0$ schneller als das stoßende war.

Daraus ergeben sich beim maximalen Ablenkwinkel $\alpha_{\max}$ die übertragenen Energien

$$
\begin{aligned}
E_1(\alpha_{\max}) &= \frac{M}{2}\, w^2 = E_0\, \frac{k-1}{k+1} = \frac{5}{9}\, E_0. \\
E_2(\alpha_{\max}) &= \frac{M}{2k}\, v^2 = E_0 \left(\frac{2}{k+1} \right) = \frac{4}{9}\, E_0,
\end{aligned}
$$

Bei einem Ablenkwinkel $\alpha = 0$ ist wegen Gleichung (23)

$$
\begin{aligned}
E_1(\alpha = 0) &= E_0 \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \approx 0.309\, E_0 \\
E_2(\alpha = 0) &= E_0\, \frac{1}{k} \left(\frac{2k}{k+1} \right)^2 \approx 0.691\, E_0
\end{aligned}
$$

(siehe dazu Abb. 4 auf Seite 8).

Komponentenweise Formulierung der Impulserhaltung:

Mit

$$
\boldsymbol{w}_0 = w_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = w \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = v \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \tag{26}
$$

ergeben sich zwei weitere Gleichungen für die Geschwindigkeitsbeträge und zwar in Stoßrichtung und quer dazu:

$$
w_0 = w\cos\alpha + \frac{v}{k}\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v}{k}\cos\beta = w_0 - w\cos\alpha \tag{27}
$$

$$
0 = w\sin\alpha + \frac{v}{k}\sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v}{k}\sin\beta = -w\sin\alpha \tag{28}
$$

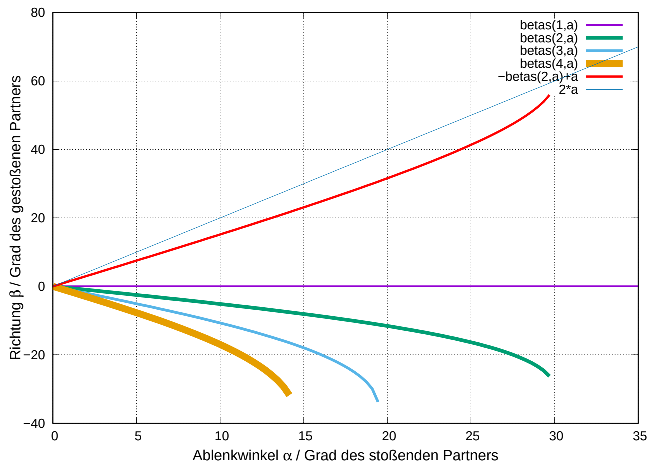

Abbildung 5: Richtung β des gestoßenen Teilchens nach dem Stoß in Abhängigkeit von der Richtung α des stoßenden Teilchens.

Quadriert man beide rechtsstehende Gleichungen, dann erhält man

$$\left(\frac{v}{k}\right)^2 = (w_0 - w)^2 \,, \tag{29}$$

wie es die Erhaltung der Energie beim elastischen Stoß in Gleichung (11) erfordert.

Richtung β des gestoßenen Teilchens

Wenn man in (28) den Ablenkwinkel α des stoßenden Teilchens vorgibt, dann ergibt sich aus (27) und (28)

$$\tan\beta = -\frac{w\sin\alpha}{w_0 - w\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad \sin\beta = -k\,\frac{w}{v}\,\sin\alpha \tag{30}$$

Abb. 5 zeigt, daß sich das gestoßene Teilchen um fast den gleichen Winkel β relativ zur Stoßrichtung bewegt wie das stoßende mit dem Winkel α, jedoch zur anderen Seite. Der Winkel zwischen beiden Abflugrichtungen beträgt also fast 2α.

Wichtige Teilergebnisse: Gleichungen (15) und (17) zeigen, daß es je nach Massenverhältnis $k := M/m \geq 1$ einen maximalen Winkel $\alpha_{\max} = \arcsin 1/k$ gibt, um den das stoßende Teilchen bei Stoß abgelenkt werden kann. Er ist um so kleiner, je größer dieses Verhältnis ist.

Die Energieübertragung beim Stoß ist ab Seite 8 beschrieben worden.

Anmerkungen:
Den Text habe ich mit LaTeX formatiert. Abbildung 1 habe ich direkt in PostScript geschrieben und die anderen Abbildungen mit Gnuplot erstellt.