

Gezeiten

Günter Green

Dieses Thema wird gerade überarbeitet und kann noch Fehler enthalten.

16. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Statisches Gezeitenmodell	2
2.1 Wirkungen des Mondes	3
2.1.1 Schwerkraft	3
2.1.2 Flieh- oder Zentrifugalkraft	5
2.1.3 Zusammenwirken von Schwer- und Fliehkraft	7
2.2 Potentiale	7
2.2.1 Berechnung des Tidenhubs	9
2.2.2 Tiden der festen Erde und der Atmosphäre	11
2.2.3 Wie würde sich ein schwererer Mond auswirken?	11
2.2.4 Wie hoch wäre der Tidenhub auf dem Mond?	11
2.3 Einfluß der Sonne	13
2.4 Die Roche-Grenze	15
2.5 Tiden auf Jupitermonden	17
3 Dynamisches Verhalten	18
4 Zusammenfassung	19
A Astronomische Parameter	22

1 Einleitung

Die Tiden (hochdeutsch: Gezeiten) der Weltmeere, also das periodisches Steigen (Flut) und Sinken (Ebbe) des Meeresspiegels zwischen Hoch- und Niedrigwasser, werden offensichtlich vom Stand des Mondes synchronisiert. Hierzu gibt es einige Fragen.

- Warum gibt es nicht nur einen sondern zwei Flutberge pro Erdumdrehung?
- Sind beide Flutberge gleich hoch und wenn ja, warum?
- Hätten beide Flutberge ein anderes Größenverhältnis, wenn der Mond schwerer oder leichter wäre?
- Wenn der Mond mit Wasser bedeckt wäre, wie groß wären dort die Flutberge?
- Was hat es mit sogenannten Spring- und Nipptiden auf sich?
- Warum ist der Tidenhub in einigen Gegenden viel höher als in anderen?
- Unterliegt außer dem Meer auch die Atmosphäre einem Gezeitenwechsel?
- Hat vielleicht auch die feste Erde einen Tidenhub?
- Haben die Gezeiten einen Einfluß auf die Rotation der Erde oder auf den Umlauf des Mondes?

Diese Fragen sollen in einem idealisierten System betrachtet werden, bei dem die Erde eine starre, mit Wasser bedeckte Kugel ist. Das Wasser bewege sich ohne Reibung gegenüber der Kugel. Es seien quasistationäre Zustände vorausgesetzt, d. h. Schwingungen sollen keine Rolle spielen. Die gezeitenerzeugenden Kräfte verursacht hauptsächlich der Mond. Sie werden hier pro Einheitsmasse, also als Beschleunigungen behandelt. Der Meeresspiegel liegt mit seinen Tiden auf einer Äquipotentialfläche der zugehörigen Potentiale.

2 Statisches Gezeitenmodell

Die Wassermassen der Meere unterliegen Gravitations- und Fliehkräften. Der Hauptanteil dieser Kräfte ist die Gravitation der Erde, also das Gewicht G .

Die auf eine Masse m wirkende **Gewichtskraft** G ist kugelsymmetrisch nach dem Schwerpunkt der Erde ausgerichtet und hat also nur eine Komponente in r -Richtung. Verknüpft ist sie mit einem Gravitationspotential

$$\varphi_g(r) = \gamma \frac{M_E}{r} \quad (1)$$

als

$$G(r) = -m \frac{\partial \varphi_g}{\partial r} = -\gamma \frac{m M_E}{r^2} := mg(r). \quad (2)$$

Wegen ihrer Kugelsymmetrie verursacht sie keine Gezeiten, könnte aber deren Hub beeinflussen.

Das Potential $\varphi_g(r)$ hat die Dimension des Quadrats einer Geschwindigkeit, also z. B. $(\text{m/s})^2$. Eine darin befindliche Masse m hat eine potentielle Energie $m\varphi = mgr$.

Ähnliches gilt für die rotationssymmetrische und vergleichsweise geringe **Fliehkraft** $F(r) = mr\Omega_E^2$ aufgrund der Rotation der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_E . Auch ihr lässt sich ein Potential der Dimension $(\text{m/s})^2$

$$\varphi_f(r) = \frac{r^2}{2} \Omega_E^2 \quad (3)$$

durch

$$F(r) = -m \frac{\partial \varphi_f}{\partial r} = mr\Omega_E^2 \quad (4)$$

zuordnen.

An der Erdoberfläche ist die Zentrifugalbeschleunigung durch die Erdrotation

$$R_E \Omega_E^2 \approx 6.4 \cdot 10^6 \cdot 5.33 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

gegen die Schwerebeschleunigung

$$g = \gamma \frac{M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^2} \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (5)$$

zu vernachlässigen.

Wenn kein Wind sie verformte, wäre die Meeresoberfläche eine rotations-symmetrische **Äquipotentialfläche**.

Den genannten Kräften überlagern sich jedoch die **Anziehungskraft** des Mondes sowie in geringerem Maße der Sonne sowie die **Fliehkraft** auf Grund der Drehung des Erde-Mond-Systems um seinen Schwerpunkt.

Diese gezeiterzeugenden Kräfte können ebenso durch ihre zugehörigen Potentiale, ausgedrückt als Funktion der Position entlang der Verbindungsgeraden Erde-Mond bzw. Erde-Sonne, angegeben werden. Das entstehende Gesamtpotential liegt nicht mehr kugelsymmetrisch um die Erde.

Der **Tidenhub** ergibt sich aus den Potentialmaxima und -minima, unter denen die Erde rotiert. Dadurch erscheinen sie sich als zwei Wellen auf der Meeresoberfläche, die sich entgegen der (breitenabhängigen) Rotationsgeschwindigkeit der Erde bewegen, so daß sie dadurch eine feste Position relativ zur Mondrichtung einhalten.

2.1 Wirkungen des Mondes

Der Erdmittelpunkt liege im Koordinatenursprung und der Mondmittelpunkt bei $x = D = 60.3 R_E = 3,846 \cdot 10^8 \text{ m}$. Der gemeinsame Schwerpunkt von Erde und Mond, das **Baryzentrum**, liegt, wie Abb. 1 auf Seite 4 zeigt, noch innerhalb der Erde bei¹

$$x_s = \frac{0 \cdot M_E + D M_M}{M_E + M_M} \approx 0.7327 R_E = 4.673 \cdot 10^6 \text{ m}. \quad (6)$$

2.1.1 Schwerkraft

Zur dominanten eigenen Schwerkraft der Erde kommt die weitaus schwächeren Massenanziehung durch den Mond hinzu. Erstere zeigt kugelsymmetrisch zum Erdmittelpunkt und kann deshalb den Meeresspiegel nicht tidenartig verformen.

Die Schwerkraft des Mondes ist zum Mond hin ausgerichtet. Ihre Stärke ist auf der Erde nicht konstant sondern – entscheidend für die Gezeiten – hängt für jeden Ort auf der Oberfläche von seinem Abstand zum Mondscherpunkt ab.

¹Wegen der verwendeten Parameter siehe Anhang A auf Seite 22.

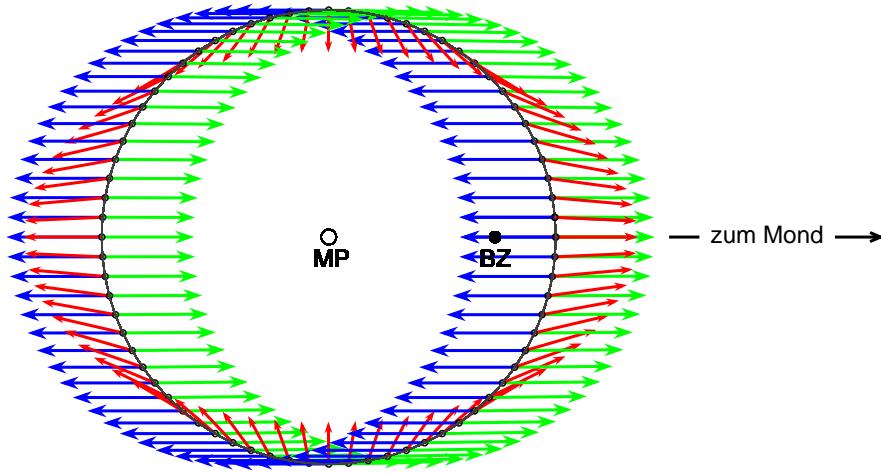


Abbildung 1: Wirkung von Mondanziehung (grüne Pfeile) und Flieh-
 kraft (blaue Pfeile), deren vektorielle Summe (rote Pfeile). MP: Mittel-
 und Schwerpunkt der Erde, BZ: Baryzentrum (gemeinsamer Erde-Mond-
 Schwerpunkt). Schwarz: der Erdumfang in der Mondbahnebene. Die roten
 Pfeile der Gesamtkraft als kleine Differenz zweier viel größerer Kräfte sind
 hier zur Verdeutlichung 25-fach vergrößert gezeichnet.

Stärke und Richtung der Massenanziehungskraft durch den Mond:

Der **Betrag** G_M der Massenanziehung auf eine Masse m durch den Mond nimmt mit dem Quadrat des Abstandes eines Massenpunktes zum Schwerpunkt des Mondes ab. Im Punkt auf der Erdoberfläche² $R_E(\cos\beta, \sin\beta)$ hat die Schwerebeschleunigung durch den Mond den **Betrag**³

$$g_M(\beta) = -\gamma \frac{M_M}{(D - R_E \cos\beta)^2} = -\gamma \frac{M_E/81.3}{(60.3 - \cos\beta)^2 R_E^2} \quad (7)$$

Er ist neben der mondbedingten Fliehkraft einer der beiden Verursacher der Meerestiden.

Seine Komponenten sind

$$g_{M_x}(\beta) = g_M(\beta) \cos\beta \quad \text{und} \quad g_{M_y}(\beta) = g_M(\beta) \sin\beta.$$

²Der Winkel β läuft auf dem Erdumfang von der Mondrichtung an entgegen dem Uhrzeigersinn.

³Wegen der verwendeten Parameter siehe Anhang A auf Seite 22.

Am mondffernsten ($\beta = 180$ Grad) und mondnächsten ($\beta = 0$ Grad) Punkt der Erde ist diese Schwerebeschleunigung gleich

$$\frac{g_M(\beta)}{\text{m/s}^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{81.3 ((60.3 - \cos \beta) \cdot 6.378 \cdot 10^6)^2} = \begin{cases} 3.44 \cdot 10^{-5} & \text{mondnah,} \\ 3.22 \cdot 10^{-5} & \text{mondffern.} \end{cases}$$

Die **Richtung** der Massenanziehungskraft weist zum Schwerpunkt des Mondes. Weil die Entfernung groß, nämlich gut sechzig mal so groß wie der Erdradius ist, weicht die Richtung für Punkte auf dem Erdumkreis nur um weniger als ein Grad davon ab. In einem Punkt $R_E(\cos \beta, \sin \beta)$ gilt für diese Richtung

$$\alpha(\beta) = -\arctan \frac{R_E \sin \beta}{D} = -\arctan \frac{\sin \beta}{60.3} < 0.96 \text{ Grad}$$

(8)

Die Gravitation durch den Mond ist für verschiedene Punkte auf dem Erdumkreis in Abb. 1 durch grüne Vektorpfeile der Länge (7) in Richtung (8) dargestellt.

Im Mittelpunkt der Erde ist die mondverursachte Schwerebeschleunigung

$$\overline{g_M} = -\gamma \frac{M_M}{D^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6.378 \cdot 10^6 \cdot 60.3)^2 \cdot 81.3} = 3.330 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (9)$$

erwartungsgemäß viel kleiner als diejenige wegen der Erdanziehung.

Auf der Erdoberfläche schwankt sie je nach Mondabstand um etwa drei Prozent um ihren Mittelwert.

2.1.2 Flieh- oder Zentrifugalkraft

Welche Fliehkraft wirkt auf ein Wasserteilchen, das sich am Orte $\vec{\varrho}$ mit der Erde mitdreht?

Bei seiner Bewegung überlagern sich

- die Fliehkraft wegen der Bewegung des Erdschwerpunkts um das Baryzentrum, den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond.
- die Eigenrotation der Erde um ihren Schwerpunkt.

Stärke und Richtung der Fliehkraft: Die Rotation der Erde verursacht eine Fliehkraft in Richtung senkrecht zur Erdachse. Sie ist rund um die Erde gleichstark und kann deshalb keinen Tideneffekt erzeugen⁴. Sie wird deshalb hier nicht berücksichtigt.

Alle Punkte der Erde bewegen sich dann – seitlich versetzt – genau wie der Erdschwerpunkt. Deshalb wirkt auf sie die Fliehkraft in gleicher Stärke und Richtung wie auf den Schwerpunkt. Er kreist um das Baryzentrum genau gegenüber dem Mond. Die Beschleunigung und damit die Fliehkraft haben als **Richtung** die Gegenrichtung zum Mond. Die einheitliche **Fliehkraftstärke** ist gegeben durch den Abstand x_s des Erdschwerpunkts vom Baryzentrum.

Im Erdmittelpunkt heben sich Fliehkraft und Anziehungskraft des Mondes gegenseitig auf. Dort gilt für die Fliehkraft f und die Anziehungskraft g_M des Mondes bzw. für die zugehörigen Beschleunigungen

$$f(0) = -g_M(0) = f_0 = -x_s \omega_M^2 \approx -3.311 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (10)$$

Im Rahmen der Rechengenauigkeit ist diese Zentrifugalbeschleunigung gleich der Schwerebeschleunigung (9) des Mondes.

Anders als die einheitliche Fliehkraft ändert sich die Mondanziehungskraft (7) mit dem Abstand $x = R \cos \beta$ eines Punktes $R(\cos \beta, \sin \beta)$ auf der Erdoberfläche gemäß

$$g(x) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{x}{60.3 R_E}\right)^2} \quad (11)$$

$$= \frac{3.3065 \cdot 10^{-5}}{\left(1 - \frac{\cos \beta}{60.3}\right)^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \begin{cases} 3.419 \cdot 10^{-5}, \beta = 0^\circ & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ 3.200 \cdot 10^{-5}, \beta = 180^\circ & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases} \quad (12)$$

Schwere- und Fliehbeschleunigung haben am mondächsten Punkt entgegengesetzte Richtungen und schwächen sich. Am mondächsten Punkt wirken sie in der gleichen Richtung und verstärken sich. Ihre Summe $g(\beta) \pm f(\beta)$ ist an beiden Punkten erdauswärts gerichtet mit den fast gleichen Werten $1.125 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ (mondnah) und $1.025 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ (mondfern). Diesen fast gleichen Beiträgen der Gezeitenkräfte an gegenüberliegenden Punkten der Erdoberfläche

⁴In diesem Sinne wird im Hinblick auf die Gezeiten gelegentlich von 'Revolution ohne Rotation' gesprochen.

ist zuzuschreiben, daß die Tidenhübe trotz der unterschiedlichen Ursachen dort gleichhoch erscheinen.

Die zu den Fliehkraftvektoren gehörenden Beschleunigungen sind in Abb. 1 auf Seite 4 für verschiedene Punkte auf dem Erdumkreis als blaue Pfeile gezeichnet.

2.1.3 Zusammenwirken von Schwer- und Fliehkraft

Die Beschleunigungsvektoren addieren sich vektoriell zu einer **Gesamtbeschleunigung** mit den Komponenten

$$r_x(\beta) = g_x(\beta) + f_x(\beta) \quad \text{und} \quad r_y(\beta) = g_y(\beta) + f_y(\beta). \quad (13)$$

Der resultierende **Betrag** ist

$$r(\beta) = \sqrt{r_x^2(\beta) + r_y^2(\beta)}, \quad (14)$$

und die **Richtung** ist

$$\alpha_r(\beta) = \arctan \frac{r_y(\beta)}{r_x(\beta)}. \quad (15)$$

Die Gesamtbeschleunigung ist durch rote Pfeile dargestellt. Abb. 1 zeigt zwei gleichhohe Maxima, nämlich auf der mondätesten und auf der mondfernsten Seite der Erde.

2.2 Potentiale

Für das Potential $\psi(x)$ zu einer Beschleunigung $f(x)$ gilt als Funktion des Abstandes x vom Erdmittelpunkt allgemein

$$\psi(x) = - \int_{x_0}^x f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad f(x) = - \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}.$$

Über die Integrationskonstante x_0 kann je nach Bedarf verfügt werden. Ich setze sie hier gleich Null.

Zu der überall gleichen **Zentrifugalbeschleunigung** $f_0 = -x_s \omega^2$ in Mondgegenrichtung gehört als Funktion des Abstandes x vom Erdmittelpunkt das Zentrifugalpotential

$$\psi(x) = \int_{x_0}^x f_0 \, dx = f_0 x,$$

(16)

eine in Richtung Mond steigende Gerade.

Am mondffernsten und am mondnächsten Punkt der Erde hat das Zentrifugalpotential die Werte

$$\psi(\pm R_E) = \pm f_0 R_E = \pm 3.3065 \cdot 10^{-5} \cdot 6.378 \cdot 10^6 \frac{m^2}{s^2} = \pm 210.9 \frac{m^2}{s^2}. \quad (17)$$

In der Mitte dazwischen, bei $x = 0$, ist $\psi(0) = 0$.

Die mondverursachte **Schwerebeschleunigung** wirkt überall in Mondrichtung und – leicht vereinfacht – der Fliehbeschleunigung genau entgegengesetzt. Ihr Betrag (7) nimmt vom mondnächsten zum mondffernsten Punkt auf der Erde in der Form $g(x) = f_0 \left(\frac{D}{D-x} \right)^2$ ab. Ihm entspricht das Potential

$$\varphi(x) = - \int_{x_0}^x f_0 \left(\frac{D}{D-x} \right)^2 dx = -f_0 \frac{D}{1-\frac{x}{D}} - f_0 \frac{D}{1} = -\frac{f_0}{\frac{1}{x} - \frac{1}{D}} \quad (18)$$

Das ist eine im Bereich der Erde fast gerade Linie, die in Richtung Mond leicht steiler werdend abfällt. An den extremen Punkten bei $x \pm R_E$ hat das Schwerepotential mit $D = 60.3 \cdot R_E = 3.846 \cdot 10^8$ die Werte

$$\varphi(\pm R_E) = f_0 \frac{1}{1 \mp 1/60.3} = \begin{cases} 3.363 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s^2} \\ 3.253 \end{cases}. \quad (19)$$

Die **Summe beider Potentiale** (16) und (18) ist

$$\Phi(x) := \psi(x) + \varphi(x) = f_0 \left(x - \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{D}} \right) = f_0 \frac{x^2}{D-x}. \quad (20)$$

Sie ähnelt wegen des Faktors x^2 einer Parabel. In Abb. 2 auf Seite 9 ist sie über einem Erddurchmesser dargestellt. An den beiden Endpunkten, dem mondffernsten und dem mondnächsten Punkt, ist

$$\Phi(\pm R_E) = \pm f_0 R_E \frac{1}{60.3 \mp 1} = \begin{cases} 3.556 \frac{m^2}{s^2} \\ 3.440 \end{cases}. \quad (21)$$

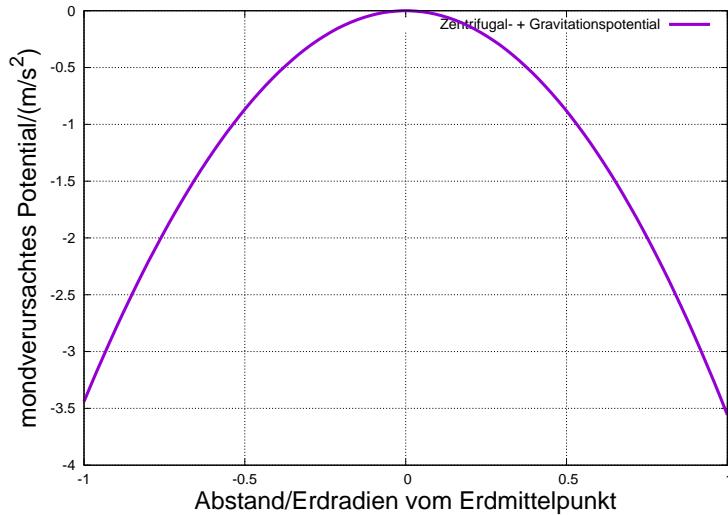


Abbildung 2: Schwerkraft und Fliehkraft wirken gegensinnig. Ihr gemeinsam Potential hat in Mondrichtung mitten auf der Erde ihr Maximum. Zu den beiden Extrempositionen auf der Erde, der mond nächsten und der mondfernsten, fällt das Gesamtpotential ab und ist an beiden gleich niedrig. Das Wasser der Weltmeere strebt deshalb dorthin und erzeugt dabei zwei gleich hohe Flutberge. Der Höhenunterschied zwischen Niedrig- und Hochwasser in der offenen See beträgt gemäß Gleichung (22) 0.35 m

2.2.1 Berechnung des Tidenhubs

Unter dem Eindruck der Erdbeschleunigung g bewirken diese zwei fast gleichhohen Potentialwerte an den extremen Mondabständen **Tidenhübe** der Höhe $\Phi(\pm R_E)/g \approx 35$ cm zwischen Hoch- und Niedrigwasser.

Die Meeresoberfläche nimmt die Form einer Äquipotentialfläche an. Welche Höhe h entspricht im dominanten Schwerkraftfeld der Erde einer Potentialdifferenz $\Delta\Phi$?

Der radiale Verlauf des Potentials nahe der Erdoberfläche bei einer Erdbeschleunigung g ist gegeben durch das eigene Gravitationspotential der Erde

$$\varphi_E(r) = gr,$$

wenn Verformungen durch die Fliehkraft sowie durch die Gravitation von Mond und Sonne sind zu vernachlässigen sind. Nahe der mittleren Meereshöhe kann

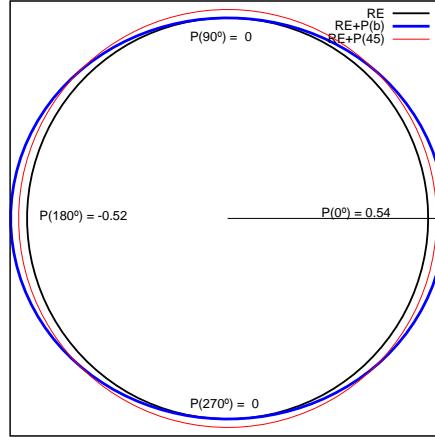


Abbildung 3: Aus mondbedingten Gravitations- und Zentrifugalpotential ergibt sich ortsabhängig der Tidenhub. Der Ort ist durch den Winkel β gegeben, gerechnet in Grad von der Mondrichtung (rechts) entgegen dem Uhrzeigersinn. Hochwasser herrscht bei $\beta = 0$ und $\beta = 180$ Grad, Niedrigwasser bei 90 und 270 Grad. Schwarz: der Erdumfang, rot: die mittlere Meereshöhe, blau: die Meereshöhe unter dem Einfluß des Mondes zur Verdeutlichung stark übertrieben gezeichnet.

g konstant als 9.81 m/s^2 angenommen werden.

Aus der Umkehrung

$$r = \frac{\Phi}{g}$$

ergibt sich der zu einem kleinen Unterschied $\Delta\Phi$ gehörende Höhenunterschied Δr einer Äquipotentialfläche zu

$$\Delta r = \frac{\Delta\Phi}{g}.$$

Dementsprechend ist dort

$$\Delta r(R_E) = \frac{\Delta\Phi}{g}. \quad (22)$$

Den an beiden gegenüberliegenden Stellen der Erde fast gleichgroßen Potentialdifferenzen (21) entsprechen demnach Höhendifferenzen von **0.17 m**

zur mittleren Meereshöhe. Sie können durch Wind und und Geländebesonderheiten örtlich stark modifiziert sein.

2.2.2 Tiden der festen Erde und der Atmosphäre

Gemäß dem hier zugrundegelegten Verfahren, nämlich den Verlauf einer durch Mond oder Sonne verbogenen Äquipotentialfläche zu berechnen, der sich eine Wasseroberfläche anpaßt, müßte sich auch die feste Erde, wenn sie biegsam genug wäre, gleichermaßen einer solchen Äquipotentialfläche mit demselben Hub annähern⁵.

In diesem Zusammenhang ergibt sich die Frage, wenn die feste Erde einen Tidenhub macht, wogegen dann die Höhe des Meerestidenhubs zu messen sei.

Ebenso wie für Meer und feste Erde wäre ein gleichhoher Gezeiteneffekt für die Atmosphäre zu erwarten. Interessant ist ebenfalls, wieweit die Bahnen künstlicher Erdsatelliten einem Gezeiteneffekt unterliegen. Dies betrifft in besonderem Maße die Navstar-Satelliten, die die Grundlage für das GPS-Navigationssystem bilden, das Ortsbestimmungen auf weniger als 10 m genau und im geodätischen Bereich bis in den cm-Bereich hinein erlaubt (siehe dazu Seeber [15, p. 100 ff.]).

2.2.3 Wie würde sich ein schwererer Mond auswirken?

Hierzu brauchte in den bisherigen Formeln nur das Verhältnis M_E/M_M vom bisherigen Wert 81.3 auf einen kleineren Wert verringert zu werden. Wir wählen, um die Wirkung zu verdeutlichen, einen zehnmal schwereren Mond.

Die Potentialdifferenz $\Delta\Phi$ gemäß Gleichung (20) würde dadurch verzehnfacht. Der Tidenhub betrüge dann also 3.6 m.

2.2.4 Wie hoch wäre der Tidenhub auf dem Mond?

Ähnlich wie im Zweikörpersystem aus Erde und Mond der Mond gezeitenbildend auf die Erde einwirkt, wirkt auch die Erde auf den Mond, wegen des Größenverhältnisses jedoch mit anderen Parameterwerten.

⁵Metzler [6, p. 88] gibt als gezeitenbedingte Deformation des Erdkörpers +26 cm bzw. -13 cm an.

Allerdings entstehen auf dem Mond keine periodischen Gezeiten, weil der Mond der Erde konstant dieselbe Seite zuwendet. Die Mondoberfläche könnte sich aber an festen Stellen anheben und absenken.

Wir können auch hier von Gleichung (22) ausgehen, wozu die Parameter zu ändern wären.

Während der Erdschwerpunkt den Abstand x_s vom Baryzentrum hat, liegt der Mondscherpunkt im Abstand $D - x_s$ auf der gegenüberliegenden Seite. (D = Abstand des Mondscherpunkts vom Erdschwerpunkt.)

Die **Zentrifugalkraft** ist analog zur Situation auf der Erde auch auf dem gesamten Mond gleich derjenigen in seinem Schwerpunkt. Sie beträgt

$$f_{0,M} = (D - x_s) \omega_m^2 = f_{0,Erde} \frac{D - x_s}{x_s} = 2.688 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} \approx 81.3 f_{0,Erde}.$$

Sie wirkt vom Baryzentrum auswärts und damit von der Erde in Richtung Mond.

Ihr entspricht auf dem Mond das **Zentrifugalpotential**

$$\psi_M(y) = -f_{0,M} y, \quad (23)$$

wobei $y = R_M \cos \beta$ der Abstand vom Mondscherpunkt, gerechnet in der Erde-Mond-Richtung ist. Dieses Potential fällt mit y linear ab.

Wie bei der Erde steht auch hier die **Erdanziehungskraft** im Mondmittelpunkt mit der Zentrifugalkraft im Gleichgewicht. Allgemein ist sie auf dem Mond gleich

$$g(y) = f_{0,M} \left(\frac{D}{D - y} \right)^2,$$

Der Winkel β zähle von dieser Richtung entgegen dem Uhrzeigersinn.

Das zugehörige **Gravitationspotential** ist auf dem Mond

$$\varphi_M(y) = f_{0,M} \left(\frac{D^2}{D - y} - D \right) = -\frac{f_{0,M}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{D}}. \quad (24)$$

Es ist eine kaum gekrümmte mit y schwach ansteigende Linie.

Das Gesamtpotential von (23) und (24) ist analog zu dem auf der Erde hier

$$\Phi_M(y) = \psi_M(y) + \varphi_M(y) = f_{0,M} \left(y - \frac{1}{\frac{1}{y} - \frac{1}{D}} \right) = f_{0,M} \frac{-y^2}{D - y} \quad (25)$$

Es hat also mit anderen Zahlenwerten den gleichen parabelförmigen Verlauf wie das Gesamtpotential, das sich in Abb. 2 auf Seite 9 bei der Erde ergeben hatte. Bei einem Mondradius $R_M = 1736 \text{ km} = 0.272 R_E = D/221.5$ ist am erdfernsten und erdnächsten Punkt des Mondes ist das Gesamtpotential

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0.0045 f_{0,M} & \text{für } y = D + R_M \\ 0.0045 f_{0,M} & \text{für } y = D - R_M \end{cases}$$

Damit ergeben sich auf dem Mond mit $f_{0,M} = 81.3 f_{0,E}$ und $g_M = g_E/6$ aus Formel (22) die Höhen der Äquipotentialflächen gleich einem Tidenhub zu

$$\Delta h \approx 0.0045 \frac{81.3}{9.81/6} = 0.22 \text{ m.}$$

Auch hier sind die beiden durch die Erde verursachten einander gegenüberliegenden Hübe gleichhoch und von der gleichen Größenordnung wie die mondverursachten auf der Erde.

Mit einem äquatorialen Radius von etwa 1738. km und einem polaren Radius von etwa 1736. km hat der Mond eine Abplattung (ca. 0.00121), die geringer ist als die Erdabplattung (ca. 0.00335). Es ist die Frage, ob die Gezeitenkräfte der Grund dafür sein können.

2.3 Einfluß der Sonne

Dem Einfluß des Mondes überlagert sich ein Einfluß der Sonne auf die irdischen Tiden. Auch durch sie entstehen Gravitation- und Fliehkräfte. Die Masse der Sonne ist $2.74 \cdot 10^7$ mal so groß wie die des Mondes. Ihr Abstand $A = 1 \text{ AE}$ zur Erde ist 392 mal so groß wie der des Mondes.⁶

Im Schwerpunkt der Erde heben sich Massenanziehung durch die Sonne und Fliehkraft aufgrund der Bahnbewegung gegenseitig auf. Auf der sonnenzugewandten Seite der Erde, also auf der Tagesseite, überwiegt die Anziehung und auf der Nachtseite die Fliehkraft. Abends und morgens ergibt sich Gleichgewicht.

Die **Fliehbeschleunigung** wegen der Bahnbewegung der Erde um die Sonne bei $x = 1 \text{ AE}$ ist im Erdmittelpunkt

$$f_{0,S} = -1 \text{ AE} \omega_E^2 = -149.6 \cdot 10^9 \cdot 3.964 \cdot 10^{-14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -5.93 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (26)$$

⁶Siehe Anhang A auf Seite 22.

Diesen Wert hat sie auch an allen anderen Punkten der Erde, da die Eigenrotation der Erde nicht zu berücksichtigen ist, die keine gezeitenerzeugende Wirkung hat.

Die Fliehbeschleunigung ist verknüpft mit dem Potential

$$\psi(x) = - \int_{x_0}^x f_{0,S} dx = f_{0,S} x = -5.93 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} x. \quad (27)$$

Es lässt sich zeichnen als eine in Richtung Sonne abfallende Gerade durch den Schwer- und Mittelpunkt der Erde, wenn man die Integrationskonstante x_0 gleich Null setzt.

Im Schwerpunkt der Erde heben sich Massenanziehung durch die Sonne und Fliehkraft aufgrund der Bahnbewegung gegenseitig auf. Auf der sonnenzugewandten Seite der Erde, also auf der Tagesseite, überwiegt die Anziehung und auf der Nachtseite die Fliehkraft. Abends und morgens ergibt sich Gleichgewicht.

Die **Schwerebeschleunigung** ist im Erdmittelpunkt deshalb gleich

$$g(0) = f_{0,S}. \quad (28)$$

Sie ist dort erwartungsgemäß viel stärker als die durch den Mond verursachte Schwerbeschleunigung (9) auf Seite 5, nämlich etwa zwanzigfach so stark.

An allen Punkten der Erde ist

$$g(x) = g(0) \left(\frac{A}{A-x} \right)^2.$$

Zu dieser solaren Gravitation gehört das Potential

$$\varphi(x) = - \int_{x_0}^x g(x) dx = g(0) \left(\frac{A^2}{A-x} - A \right) = g(0) \frac{Ax}{A-x}.$$

Das **Gesamtpotential** zu Schwerkraft und Fliehkraft ist

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \psi(x) = g(0) \left(\frac{Ax}{A-x} - x \right) = g(0) \frac{x^2}{A-x}.$$

Der Verlauf ähnelt einer nach unten geöffneten Parabel.

An der Mittags- bzw. Mitternachtsposition hat das sonnenerzeugte Potential $\Phi(\pm R_E)$ den Wert

$$\Phi(\pm R_E) = g(0) \frac{R_E}{23455 \pm 1} = 5.93 \cdot 10^{-3} \frac{6.378 \cdot 10^6}{23455 \pm 1} \frac{m^2}{s^2} = 1.6125 \frac{m^2}{s^2},$$

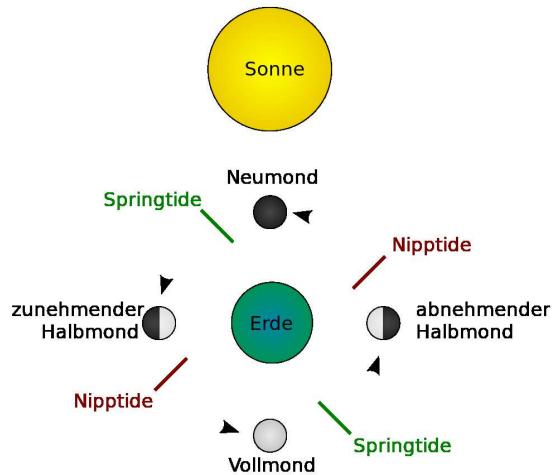


Abbildung 4: Tidenhub je nach relativer Stellung von Mond und Sonne
 aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Gezeiten>

also etwa die Hälfte des monderzeugten Potentials (21). Diesen nahezu Werten entspricht bei einer Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ein Tidenhub von 0.16 m, also auch etwa die Hälfte des monderzeugten Hubs.

Je nach der Position des Mondes relativ zur Sonne kann sich der auf Seite 10 genannte Tidenhub daher um 50 Prozent bis zur **Springtide** (bei Vollmond oder bei Neumond) erhöhen oder bis zur **Nipptide** (bei Halbmond) erniedrigen. Trägheiten führen angeblich dazu, daß z. B. Springtiden etwa zwei Tage später als bei Voll- und bei Neumond auftreten, wie Abb. 4 zeigt.

2.4 Die Roche-Grenze

Eine interessante Frage, die sich in diesem Zusammenhang beantworten läßt, ist, ob die Mondbahn nicht auch viel näher bei der Erde liegen könnte.

Die Antwort ist: nein, nicht beliebig. Die Grenze wäre dann erreicht, wenn die Gezeitenkräfte an der Mondoberfläche stärker werden als seine eigene Schwerkraft und ihn also zerreißen würden. Diese Grenze heißt **Roche-Grenze**.

Die Gezeitenkräfte setzen sich aus der Erdanziehung und der Fliehkraft aufgrund der Drehung um den gemeinsamen Schwerpunkt zusammen. Der

Abstand von Mond- und Erdmittelpunkt sei d . Der Mond habe den Radius r und die Masse m . und die Erde die Masse $M = am$. Der Koordinatenursprung liege im Mondmittelpunkt. Die Erdbeschleunigung beträgt am erdnächsten und erdfernsten Punkt des Mondes

$$G(\pm r) = -\gamma \frac{M}{(d \pm r)^2}.$$

Um die Fliehkräfte zu berechnen, nehmen wir an, daß wie auch jetzt der Mond der Erde immer dieselbe Seite zeigt. Die Beschleunigung ist

$$F(\pm r) = (d \pm r) \omega^2.$$

Im Mondmittelpunkt herrscht das Gleichgewicht

$$\gamma \frac{M}{d^2} = d\omega^2.$$

Daraus folgt für die Summe dieser Kräfte mit der Abkürzung $q := r/d$

$$G(\pm r) + F(\pm r) = -\gamma \frac{M}{d^2} \left(\frac{1}{(1 \pm q)^2} - (1 \pm q) \right).$$

Die Roche-Grenze ist erreicht, wenn dies gleich der Mondanziehung

$$G_{\text{Mond}} = \mp \gamma \frac{m}{r^2} = \mp \gamma \frac{M}{d^2} \frac{1}{aq^2}$$

ist, wobei deren kleine Verringerung durch die Mondeigenrotation vernachlässigt worden ist. Der entsprechende Abstand d ergibt sich dann aus

$$-\frac{1}{(1 \pm q)^2} + (1 \pm q) = \frac{\pm 1}{aq^2}.$$

Dies ist äquivalent einer algebraischen Gleichung fünften Grades und somit nicht analytisch zu lösen. Iterativ erhält man als Lösung

$$q = 0.150973.$$

Für die Rückseite des Mondes ergäbe sich der etwas größere Wert

$$q = 0.1681391.$$

Der dem kleineren q -Wert entsprechende Mittelpunktsabstand Mond–Erde ist

$$d = r/q = 11455 \text{ km.}$$

Eine eventuelle elastische Abweichung von der Kugelform ist hierbei noch nicht berücksichtigt. Zieht man die Radien beider Himmelskörper ab, bliebe ein Abstand von nur gut 3000 km. Der Mond brauchte in diesem Minimalabstand nur etwa 3.4 Stunden für einen Umlauf.

Ab hier noch in Bearbeitung ...

2.5 Tiden auf Jupitermonden

Die Jupitermonde unterliegen einem beträchtlichen Gezeiteneinfluß, weil der gezeitenerzeugende Himmelskörper, nämlich Jupiter, sowohl eine riesige Masse, nämlich etwa 318 Erdmassen, hat als auch aus geringem Abstand von nur 5.9 Jupiter-Radien auf den galileischen Mond Io einwirkt. (Vier kleinere Satelliten umkreisen Jupiter noch viel näher.) Ios Masse beträgt 0.01496 Erdmassen, und sein Radius ist 1815 km [16].

Wegen des Massenverhältnisses Io/Jupiter $M_{\text{Io}}/M_{\text{Jup}} = 4.7 \cdot 10^{-5}$ hat der Parameter a in Formel (22) auf Seite 10 den sehr kleinen Wert

$$a = 4.7 \cdot 10^{-5} \cdot \text{???} \quad \text{noch zu bearbeiten!}$$

Der Parameter $b = d/r_{\text{Io}}$ ist hier

$$b = 232.2 \cdot \text{???} \quad \text{noch zu bearbeiten!}$$

Entsprechend groß ist die Potentialdifferenz auf der Oberfläche von Io, und zwar etwa $1704 \mu g_{\text{Io}} R_{\text{Io}}$. Dem entspricht gemäß Formel (22) ein Tidenhub von etwa 3093 m⁷. Zwar ist Io nicht von Wasser bedeckt, doch gibt es in seinen Schichten eine Gezeitenreibung, die ähnlich wie beim Erdmond seine Eigendrehung bremst. Anders als der Erdmond hat Io jedoch eine elliptischere Bahn und dementsprechend eine periodisch veränderliche Winkelgeschwindigkeit. Deshalb kann hier die Reibung nicht dazu führen, daß Io immer genau dieselbe Seite Jupiter zeigt, denn die Flutberge machen eine Hin-und-her-Bewegung. Sie heizen durch Reibung dabei die äußere Schicht von Io auf und sind die dominante Wärmequelle dieses Mondes.

⁷Peale et al. [12] sprechen von einem realen Hub von 100 m.

Dieser Effekt einschließlich eines daraus resultierenden Vulkanismus sowie eines eventuell geschmolzenen Kerns, der ein Magnetfeld ermöglicht, wurde 1979 drei Tage vor dem Voyager-Vorbeiflug an Io von Peale, Cassen und Reynolds unter dem Titel 'Melting of Io by tidal dissipation' [12] richtig vorhergesagt, was seither als eine der erfolgreichsten wissenschaftlichen Vorhersagen gilt. Der Gezeitenreibung wird auch der von Voyager auf Io beobachtete Vulkanismus zugeschrieben.

3 Dynamisches Verhalten

Die Erde dreht sich unter den Flutbergen und Tälern mit der beträchtlichen Geschwindigkeit

$$v_{\text{rot}} = R (\omega_{\text{Erdrotation}} - \omega_{\text{Mondumlauf}}) \cos \vartheta.$$

Am Äquator ($\vartheta = 0$) ist dies etwa 1600 km/h, also Überschallgeschwindigkeit. Angesichts dieses Wertes und der geografischen Unregelmäßigkeiten sind erhebliche Abweichungen von den hier unter idealisierten Annahmen berechneten Tidenhüben zu erwarten. Reibungskräfte führen zunächst dazu, daß das Tidengebilde als Ganzes von der rotierenden Erde um einen gewissen konstanten Winkel mitgezogen wird und dem Mond daher systematisch vorausseilt.

Wassermassen sind unter dem Einfluß der Schwerkraft schwingfähige Gebilde. Nachdem sie durch die Gezeitenkräfte vorübergehend angehoben werden, schwingen sie zurück. Wenn dabei in gewissen Wasserbecken die Resonanzfrequenz nahe der Tidenfrequenz liegt, kann das zu erhöhten Hüben führen.

Die tatsächlich zu beobachtenden Tidenhübe unterliegen weiteren starken Einflüssen, zu denen insbesondere bekanntlich der Wind gehört.

4 Zusammenfassung

Die Meeresgezeiten der Erde, d. h. das periodische Auftreten von Ebbe und Flut beruht auf Flieh- und Gravitationskräften im rotierenden System von Erde, Mond und Sonne, wobei der Einfluß des Mondes überwiegt. Es entstehen dabei zwei ungefähr gleichgroße Flutberge auf gegenüberliegenden Seiten der Erde, unter denen sich die Erde dreht. Die Eigenrotation der Erde selber trägt nicht zu den gezeiterzeugenden Kräften bei. Sie verschiebt aber durch Reibung die Position der Flutberge.

Die Höhe der Flutberge schwankt durch geografische und meteorologische Einflüsse örtlich und zeitlich stark.

Literatur

- [1] Barger, V. und M. Olsson: *Classical Mechanics, a Modern Perspective*. McGraw Hill, New York, 1995.
- [2] Bartels, J.: *Gezeitenkräfte*. Handbuch der Physik, 48:734–774, 1957.
- [3] Bartels, Julius: *Fischer-Lexikon Geophysik*. Fischer-Bücherei KG, Frankfurt, 1960.
- [4] Defant, Albert: *Ebbe und Flut des Meeres, der Atmosphäre und der Erdfeste*. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953.
- [5] Dietrich, Günter und Kurt Kalle: *Allgemeine Meereskunde*. Gebrüder Bornträger, Berlin, 1957.
- [6] Grehn, Joachim und Joachim Krause: *Metzler Physik*. Schroedel, Hanover, 1998.
- [7] Kertz, Walter: *Einführung in die Geophysik I*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.
- [8] King, A. R. und O. Regev: *Physics with Answers*. Cambridge University Press, 1997.
- [9] Kippenhahn, Rudolf: *Unheimliche Welten, Planeten, Monde und Kometen*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1987.
- [10] Krauss: *Einführung in die Ozeanografie*.
- [11] Krauss, Wolfgang: *Methoden und Ergebnisse der Theoretischen Ozeanographie II*, Band 1. Gebrüder Bornträger, Berlin, 1966.
- [12] Peale, S. J., P. Cassens und R. T. Reynolds: *Melting of Io by tidal dissipation*. Science, 203:892–894, 1979.
- [13] Rogers, John Hubert: *The Giant Planet Jupiter*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [14] Schäfer, Hans: *Astronomische Probleme und ihre physikalischen Grundlagen*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, dritte Auflage, 1988.

- [15] Seeber, Günter: *Satellitengeodäsie*. Waltre de Gruyter, Berlin, New York, 1989.
- [16] Sohl, Frank: *Aufbau und Geologie der Planeten* in: <http://ifp.uni-muenster.de/sohl/solar/io.html>, 1998.
- [17] Stacey, Frank D.: *Physics of the Earth*. Brookfield Press, Kenmore, Brisbane 4069, Australia, 1992.
- [18] Strobach, Klaus: *Unser Planet Erde Ursprung und Dynamik*. Gebrüder Bornträger, Berlin und Stuttgart, 1991.
- [19] Unsöld, Albrecht: *Der neue Kosmos*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1967.

A Astronomische Parameter

(nach Wikipedia, Stand Februar 2021)

Gravitationskonstante	γ	$6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
Sonnenmasse	M_S	$2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Erdmasse	M_E	$6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Erdradius	R_E	$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$
Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation	Ω_E	$\frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ /s}$
Winkelgeschwindigkeit der Erdbahn	ω_E	$\frac{2\pi}{86400 \cdot 365.25 \text{ s}} \approx 1.991 \cdot 10^{-7} \text{ /s}$
	ω_E^2	$3.964 \cdot 10^{-14} \text{ /s}^2$
Winkelgeschwindigkeit der Mondbahn	ω_M	$\frac{2\pi}{86400 \cdot 27.322 \text{ s}} \approx 2.662 \cdot 10^{-6} \text{ /s}$
	ω_M^2	$7.0845 \cdot 10^{-12} \text{ /s}^2$
Mondradius	R_M	$1.737 \cdot 10^6 \text{ m} = 0.272 R_E$
Mondmasse	M_M	$7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg} = M_E/81.3$
$ \text{Erde} - \text{Mond} $	D	$383 \cdot 10^6 \text{ m} = 60.3 R_E$
$ \text{Baryzentrum} - \text{Erdmittelpunkt} $	x_s	$4.673 \cdot 10^6 \text{ m} = 0.7327 R_E$
$ \text{Sonne} - \text{Erde} $	A	$1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m} = 23\,455 R_E$