G. Green
Mathematik
26-Okt-2021
505

Kegelschnitte

Ein Kegel mit seiner Achse in z-Richtung

Durch

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

wird der Mantel eines (Doppel-)kegels beschrieben, dessen Achse die z-Achse ist und der einen Öffnungswinkel von 90 Grad hat. Wenn ihn eine Ebene schneidet, dann bilden die Schnittlinien bestimmte Kurven, Kegelschnitte genannt. Sie können Ellipsen, im Spezialfall Kreise, Parabeln oder Hyperbeln sein. Das soll hier hergeleitet werden (siehe Abb. 1 auf Seite 5).

Schnittebene parallel zur xy-Ebene: Eine solche Ebene ist gegeben durch $z = z_0$. Gleichung (1) wird damit zu

$$\boxed{x^2 + y^2 = z_0^2}, \tag{2}$$

also zur Gleichung eines **Kreises** in dieser Ebene, dessen Radius linear mit deren Höhe $|z_0|$ zunimmt. Dies ist die einfachste Form eines Kegelschnitts. Die übrigen erwähnten Formen ergeben sich, wenn die Kegelachse relativ zur Normalen dieser xy-Ebene geneigt wird und einen Winkel $\varphi \neq 0$ mit der z-Achse bildet.

Geneigte Kegelachse: Bei einer solchen Neigung um die y-Achse transformiert sich (mit den Abkürzungen $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$) ein Vektor wie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + sz \\ y \\ -sx + cz \end{pmatrix} \tag{3}$$

Der geneigte Kegelmantel (2) wird dabei zu

$$(cx + sz)^2 + y^2 = (-sx + cz)^2 \,. \tag{4}$$

oder

$$y^2 = -\underbrace{(c^2 - s^2)}_{c_2}(x^2 - z^2) - 2 \cdot \underbrace{2cs}_{s_2} xz \tag{5}$$

(mit $c = \cos(\varphi)$, $s_2 = \sin(2\varphi) = 2sc$, $c_2 = \cos(2\varphi) = c^2 - s^2$).

Fallunterscheidungen: Je nach Neigung φ der Kegelachse gegen die z-Achse sind in einer zur x, y-Ebene parallelen Schnittebene in der Höhe $z = h$ anschaulich verschiedene Arten von Schnittlinien zu erwarten:

- Bei $\varphi = 45^\circ$ liegt die x-Achse auf dem Kegelmantel. Hier ist $c_2 = 0$ und $s_2 = 1$. Damit wird aus (5)

  $$\boxed{y(x, h) = \pm\sqrt{-2hx}}. \tag{6}$$

  Dem entspricht mit $h > 0$ eine zur negativen x-Achse geöffnete **Parabel** mit ihrem Scheitel bei $x = 0$. Bei $h < 0$ ist sie in Gegenrichtung geöffnet.

- Bei $\varphi = 90^\circ$ ist $c_2 = -1$ und $s_2 = 0$. Das macht Gleichung (5) zu

  $$x^2 - y^2 = h^2 \tag{7}$$

  oder

  $$\boxed{y(x, h) = \pm\sqrt{x^2 - h^2}}, \tag{8}$$

womit **Hyperbeln** mit der Symmetrieachse in x-Richtung beschrieben sind. Ihre Scheitel liegen bei $\pm h$. Ist $h = 0$, wird die xy-Ebene die Schnittebene, und das Hyperbelpaar entartet zu zwei **Geraden**, die sich im Ursprung mit den Steigungen 1 und -1 kreuzen. Sie sind die Asymptoten der Hyperbelzweige.

Bei $\varphi \in (45°, 90°]$ entstehen ebenfalls Hyperbeln.

- Bereits bei $\varphi \in [0, 45°)$ sind **Ellipsen** zu erwarten. Gleichung (5) läßt sich dann schreiben als

$$\boxed{y(x,h) = \pm\sqrt{c_2}\sqrt{-c_2(x^2 - h^2) - 2s_2hx}}. \tag{9}$$

Nullstellen: Diese Funktion hat mit $t_2 \equiv s_2/c_2$ Nullstellen x_0 für

$$x_0^2 + 2t_2hx_0 - h^2 = 0. \tag{10}$$

Das ist eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen

$$x_0 = -t_2h \pm \sqrt{t_2^2h^2 + h^2} = -t_2h \pm \frac{h}{c_2}. \tag{11}$$

Die **große Halbachse** der Ellipse hat danach die Länge

$$a = \frac{h}{c_2}, \tag{12}$$

und die Ellipse hat ihren Mittelpunkt bei $x = -t_2h$.

Extremwerte: An den Extremwerten x_e von (9) ist $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$. Dies ist erfüllt für

$$x_e = -\frac{s_2}{c_2}h. \tag{13}$$

Dort an den Endpunkten der **kleinen Halbachse** der Ellipse hat y(x,h) die Werte

$$b = y(x_e, h) = \pm\sqrt{c_2}h. \tag{14}$$

Brennpunkte: Die Brennpunkte haben vom Mittelpunkt der Ellipse den Abstand

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{15}$$

Spezialfall: Wenn der Kegel nicht geneigt wird sondern mit $\varphi = 0°$ seine Achse in z-Richtung behält, dann wird mit $c_2 = 1$ und $s_2 = 0$ Gleichung (9) zu

$$x^2 + y^2 = h^2, \tag{16}$$

also der Gleichung eines **Kreises** um den Ursprung mit dem Radius h.

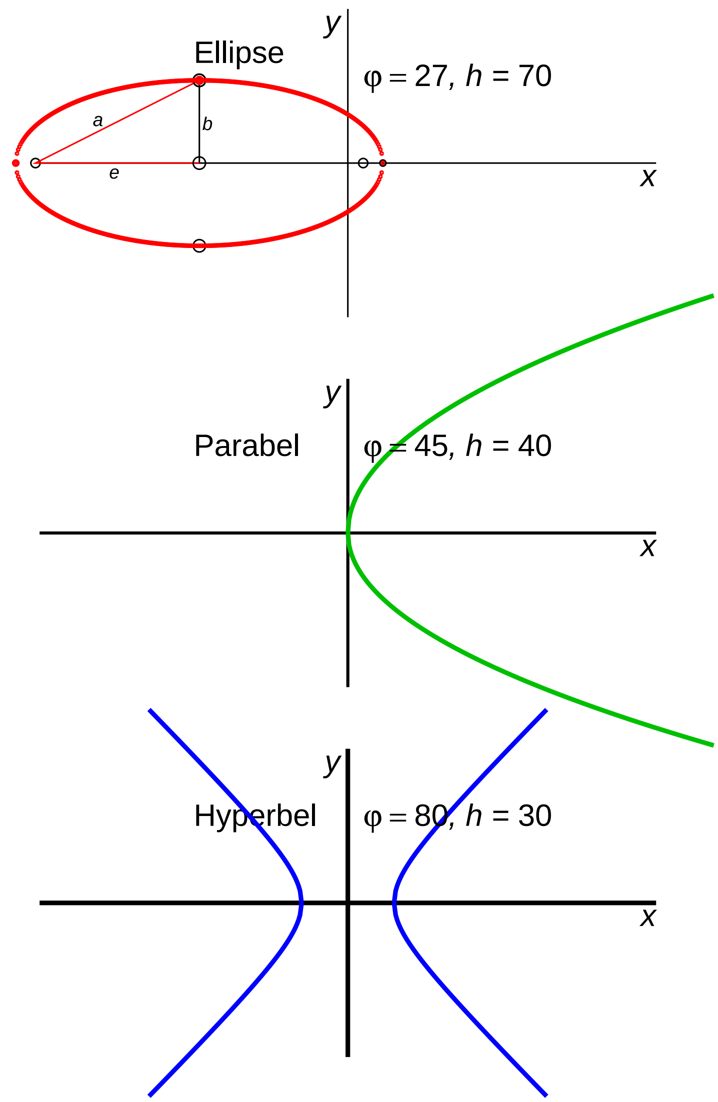

Abbildung 1: Ebene Schnitte durch einen Kegel (Gl. (1)):
— Ellipse bei Kegelneigung $\varphi \in (0, 45°)$ (Gl. (9)),
— Parabel bei $\varphi = 45°$ (Gl. (6))
und Hyperbel bei $\varphi \in (45, 90°)$ (Gl. (8)).