G. Green
Technik
14-Aug-2021
1074

Die Bernouilli-Gleichung für kompressible Fluide

In einer Stromröhre bleibt bei einem **imkompressiblen** Fluid wie Öl oder Wasser oder näherungsweise genügend langsam strömender Luft nach Bernoulli[1] die Summe

$$p = \frac{\varrho}{2} v^2 = p_0 \tag{1}$$

konstant.

Das ist die Grundlage der Messung der Geschwindigkeit v einer Strömung aus der Differenz des Gesamtdrucks p_0 an einem Staurohr (Pitot-Rohr) und des statischen Drucks p in der ungestörten Strömung als

$$v = \sqrt{\frac{2}{\varrho} (p_0 - p)}. \tag{2}$$

Fahrtmesser in Luftfahrzeugen haben keine Kenntnis der Luftdichte. Bei ihnen kann der Luftdruck in Meereshöhe als QNH eingestellt werden. Dem entspricht dann in Standardatmosphäre eine dortige Dichte. Sie dient in (2) als Dichte ϱ. Aus der damit angezeigten Geschwindigkeit (indicated air speed IAS) kann die wahre Luftgeschwindigkeit (true air speed TAS) berechnet werden. . . .

Der Fahrtmesser verwendet zur Berechnung der Geschwindigkeit die Standardluftdichte in Meereshöhe. Die tatsächliche Luftdichte am Meßort steht ihm nicht zur Verfügung. Aus der bekannten Dichtehöhe ergibt sich aber eine Korrektur, die dann die wahre Geschwindigkeit TAS liefert.

Die Dichtehöhe verändert sich für jedes Grad der Abweichung von der Normtemperatur für die gegebene Druckhöhe um 120 Fuß. Die Druckhöhe ist die Höhe in der Standardatmosphäre, auf der derselbe Druck herrscht, wie am Ort unserer Betrachtung.

In **kompressiblen** Fluiden gilt dies nicht mehr. In der Bernoulli-Gleichung muß dann die Dichte der inneren Energie des Fluids ergänzt werden. Sie ist

$$e = v_V T \tag{3}$$

oder – unter der Verwendung der Gasgleichung

$$\frac{p}{\varrho} = RT \tag{4}$$

[1]Daniel Bernoulli 1738

mit $R = c_\mathrm{p} - c_\mathrm{V}$ sowie $\kappa = c_\mathrm{p}/c_\mathrm{V}$ (=1.4 für Luft) gleich

$$e = \frac{1}{\kappa - 1}\,\frac{p}{\varrho}. \tag{5}$$

Nach Division durch die (wegen Kompressiblität jetzt nicht mehr konstante) Dichte ϱ modifiziert sich die Bernoulli-Gleichung (1) damit zu

$$\frac{p}{\varrho} + e + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\varrho} + e_0. \tag{6}$$

Dies führt auf

$$\frac{v^2}{2} = c_\mathrm{p}\,(T_0 - T) = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left(\frac{p_0}{\varrho_0} - \frac{p}{\varrho}\right). \tag{7}$$

Mit der Schallgeschwindigkeit

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\varrho}} \tag{8}$$

ergibt sich für die **Mach-Zahl** $M := v/a$

$$M^2 = \frac{2}{\kappa - 1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = \frac{2}{\kappa - 1}\left(\frac{p_0/\varrho_0}{p(\varrho} - 1\right) \tag{9}$$

Aus der ersten Form ist die von Kompressionseffekten unabhängige **statische Temperatur** T (static air temperature SAT) bestimmbar, die für die Vereisungsgefahr von Flugzeugflächen entscheidend ist, wenn neben der Machzahl M die **Gesamttemperatur** T_0 (total air temperature TAT) im Staurohr gemessen wird. Es ist

$$\mathrm{SAT} = T = \frac{T_0}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}\,M^2} = \frac{T_0}{1 + 0.2\,M^2}. \tag{10}$$

Unter der Annahme adiabatischer Zustandsänderungen, d. h. $p/\varrho^\kappa = p_0/\varrho_0^\kappa$ erhält man daraus

$$M = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left(\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right)} \tag{11}$$

Hiernach läßt sich also die Mach-Zahl M allein aus dem Verhältnis des Gesamtdrucks p_0 am Staurohr und dem statischen Druck p der ungestörten Strömung bestimmen.

Erweitert man dies mit der Schallgeschwindigkeit $a_{\mathrm{MSL}} = \sqrt{\kappa R T_{\mathrm{MSL}}}$ in Meereshöhe MSL, ergibt sich die wahre Luftgeschwindigkeit (true air speed TAS) als

$$\mathrm{TAS} = v = \sqrt{\frac{T}{T_{\mathrm{MSL}}}} \sqrt{\frac{2\kappa R T_{\mathrm{MSL}}}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)} \tag{12}$$

Geht man jetzt zur äquivalenten Geschwindigkeit[2] (equivalent air speed EAS) über, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{EAS} = v_{\mathrm{e}} &= \sqrt{\frac{\varrho T}{\varrho_{\mathrm{MSL}} T_{\mathrm{MSL}}}} \sqrt{\frac{2\kappa R T_{\mathrm{MSL}}}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)} && (13) \\ &= a_{\mathrm{MSL}} \sqrt{\frac{p}{p_{\mathrm{MSL}}}} \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)} && (14) \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit EAS läßt sich also – wenn auch durch einen recht komplizierten Ausdruck – ausdrücken durch die Schallgeschwindigkeit in Meereshöhe sowie das Verhältnis der meßbaren Größen statischer Drucks p_0 im Staurohr und p im ungestörten Luftstrom.

[2] Bei gleicher äquivalenter Geschwindigkeit hat ein Flugzeug unabhängig von der Dichte der umgebenden Luft immer denselben aerodynamischen Auftrieb.