

KOSMISCHE ELEKTRODYNAMIK

GÜNTER GREEN

Vorlesungsskript

1995–2000

INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE UND ANGEWANDTE PHYSIK
DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Die Maxwell-Gleichungen	2
2.1 Der Poyntingsche Strahlungsdichtevektor und die Energiebilanz im elektromagnetischen Feld	3
2.2 Elektromagnetische Wellen	3
2.3 Ebene elektromagnetische Wellen in homogenen ruhenden Medien	6
2.3.1 Ein Beispiel für die Leitfähigkeit σ	8
2.3.2 Brechung (Refraktion) elektromagnetischer Wellen	9
2.4 Vektorpotentiale	11
2.4.1 Vektorpotential des homogenen Magnetfeldes	11
2.4.2 Vektorpotential eines beliebigen stationären Magnetfeldes	12
2.4.3 Wellengleichung für Vektor- und skalares Potential	13
2.5 Vierervektoren	13
2.6 Tensoren und Bilinearformen	15
2.7 Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik	16
2.8 Lorentz-Transformation von B und E	18
3 Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern	19
3.1 Die Lorentz-Kraft	19
3.1.1 Beispiel für die Bedeutung der Lorentz-Kraft	20
3.2 Bewegung in statischen Magnetfeldern	21
3.2.1 Energiesatz	21
3.2.2 Homogenes Magnetfeld	22
3.2.3 Stationäres radiales Magnetfeld	25
3.3 Drift	30
3.3.1 Drift durch Gravitation	31
3.3.2 Drift durch elektrostatische Kraft	32
3.4 Näherungslösungen der Bewegungsgleichung	32
3.4.1 Das Führungszentrum	33

3.4.2	Gradientendrift	33
3.4.3	Krümmungsdrift	35
3.4.4	Teilchenbewegung nahe einer magnetischen Grenzschicht	36
3.4.5	Feldstärkeänderungen in Feldrichtung	37
3.4.6	Strahlungsgürtel	41
3.4.7	Adiabatische Invarianten	44
3.4.8	Pitchwinkelstreuung	46
4	Magnetohydrodynamik	50
4.1	Elektromagnetische Felder in leitfähigen Medien	50
4.2	Diffusion von Magnetfeldern	52
4.3	Mitführung von Magnetfeldern	52
4.4	Das interplanetare Magnetfeld	54
4.5	Stromschichten	57
4.5.1	Die äquatoriale Stromschicht	58
4.5.2	Polare Ströme	60
4.5.3	Stromschichten in der Erdmagnetosphäre	62
4.6	Helizität des interplanetaren Magnetfeldes	62
4.7	Elektrodynamik bewegter Medien	65
4.8	Magnetischer Druck und Zug	66
4.9	Magnetohydrodynamische Wellen	67
4.9.1	Zum Vergleich: Schallwellen	67
4.9.2	Magnetosonische und Alfvén-Wellen	69
A	Formeln	A-1
A.1	Kartesische Koordinaten	A-2
A.2	Krummlinige orthogonale Koordinaten	A-3
A.3	Zylinderkoordinaten	A-4
A.4	Kugelkoordinaten	A-5
B	Rechnungen zum Vektorpotential A des Parker-Feldes	B-1
B.1	Berechnung von $\operatorname{div} A$ im Parker-Feld	B-1

B.2 Berechnung von $\text{rot } \mathbf{A}$ im Parker-Feld	B-2
C Orthogonalität von Archimedischen und hyperbolischen Spiralen	C-3
D Bewegungsgleichungen ohne strenge Lösungen	D-1
D.1 Homogenes zeitabhängiges Magnetfeld	D-1
D.2 Homogenes Magnetfeld konstanter Richtung, das seine Stärke ändert	D-2
D.3 Das Betatron	D-4
D.4 Homogenes Magnetfeld, das seine Richtung ändert	D-6
D.4.1 Betrachtung in einem mitrotierenden Koordinatensystem .	D-10
D.5 Magnetfeld mit Gradienten senkrecht zur Feldrichtung	D-11

Abbildungsverzeichnis

1	Drift geladener Teilchen im Magnetfeld mit zusätzlicher Kraft.	31
2	Geladenes Teilchen im Magnetfeld	34
3	Teilchenbahn nahe einer magnetischen Grenzschicht	37
4	Longitudinalkraft im divergenten Magnetfeld	40
5	Typische äquatoriale Pitchwinkelverteilung geladener Teilchen im Dipolmagnetfeld der Erde.	43
6	Zum Satz von Alfvén.	53
7	Interplanetare Magnetfeldlinie durch die Erdposition	55
8	Stromschicht	57
9	Interplanetarer Magnetfeldsprung in der Äquatorebene der Sonne und Stromschicht	59
10	Das vollständige heliosphärische Stromsystem	61
11	Das magnetosphärische Stromsystem	63
12	Helizität des interplanetaren Magnetfeldes	64
13	Links: Archimedische und hyperbolische Spiralen schneiden sich im rechten Winkel, wenn beide den gleichen Maßstabsfaktor haben. Rechts: Hier unterscheiden sich die Maßstabsfaktoren um den Faktor 4.	C-4

1 Einleitung

Die Bewegung kosmischer Materie wird zu einem wesentlichen Teil durch die Elektrodynamik beschrieben, da die Materie überwiegend im ionisierten Zustand, d. h. als Plasma vorliegt. Insbesondere die magnetischen Kräfte sind dann häufig größer als die Gravitationskräfte.

Kern der Elektrodynamik sind die Maxwell-Gleichungen. Sie beschreiben als lineare partielle Differentialgleichungen ersten Ordnung den Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen und Ladungen einerseits und elektrischen und magnetischen Feldern andererseits. Aus den Maxwell-Gleichungen folgen u. a.

- Gleichungen für die Ausbreitung der Felder,
- eine Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladungsdichte,
- die Lorentz-Kraft,
- der Zusammenhang zwischen Magnetfeldsprüngen und Stromschichten,
- die Mitführung von ‘eingefrorenen’ Magnetfeldern in Plasmen.

2 Die Maxwell-Gleichungen

Ampere/Maxwell:	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$	(1)
Faraday:	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	
Coulomb:	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	
	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	

MKSA-Maßeinheiten:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}] &= \frac{\text{A}}{\text{m}} \\
 [\mathbf{E}] &= \frac{\text{V}}{\text{m}} \\
 [\mathbf{B}] &= \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} = \text{T} \\
 [\mathbf{D}] &= \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2} \\
 [\mathbf{j}] &= \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \\
 [\rho] &= \frac{\text{As}}{\text{m}^3}
 \end{aligned}$$

In isotroper Materie ist

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{Am}} \\
 \varepsilon_0 &= 8.86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}
 \end{aligned}$$

(Im cgs-System ist $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, 1 Gauß = 100 μT, 1 γ = 1 nT.)

2.1 Der Poyntingsche Strahlungsdichtevektor und die Energiebilanz im elektromagnetischen Feld

Multipliziert man in den Maxwell-Gleichungen $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ mit $-\mathbf{E}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ mit \mathbf{H} skalar und addiert beide Gleichungen, so erhält man unter Verwendung der allgemeinen Formel $\mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} = \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) = 0. \quad (2)$$

Integriert man über ein geschlossenes Volumen V mit der Oberfläche F und definiert als Poyntingschen Strahlungsdichtevektor der Dimension W/m² den Vektor

$$\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (3)$$

so erhält man unter Verwendung des Gaußschen Satzes $\iiint \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \oint_{F} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}$

$$\oint_F \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} + \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) dv = 0. \quad (4)$$

Die Strahlung aus dem betrachteten Volumen sowie die in dem Volumen durch das Produkt $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ in Wärme umgesetzte Leistung verringern also die Feldenergie, deren Dichte aus dem magnetischen Anteil $\varrho_m := \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$ und dem elektrischen Anteil $\varrho_e := \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$ besteht. Wenn der Strom in Richtung des elektrischen Feldes fließt, also $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ gilt, dann liegen ohmsche Verluste der Dichte $\sigma \mathbf{E}^2 = \mathbf{j}^2/\sigma$ vor. Fließt der Strom jedoch unter dem Einfluß der Lorentz-Kraft senkrecht zum elektrischen Feld (siehe Abschnitt 3.3.2), dann findet keine Umwandlung in Wärme statt.

In einem stationären Stromkreis aus Spannungsquelle und ohmschem Widerstand entfällt der dritte Term in Gleichung (4), und die im zweiten Term beschriebene Wärmeleistung ergibt sich aus der eingestrahlten Leistung des ersten Terms.

2.2 Elektromagnetische Wellen

Im Vakuum und näherungsweise in einer Neutralgasatmosphäre entfällt wegen fehlender Ladungsträger der Stromterm in den Maxwell-Gleichungen, und ε und

μ sind gleich Eins. Es gilt also

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Die Gleichungen werden gelöst durch \mathbf{H} - und \mathbf{E} -Vektoren, die sich wellenförmig ausbreiten. Man findet dies unmittelbar, indem man von der ersten Maxwell-Gleichung die Rotation bildet und in die zweite einsetzt und ebenso umgekehrt verfährt. Dies separiert die gesuchten Funktionen \mathbf{H} und \mathbf{E} :

$$-\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{H}}_0 + \Delta \mathbf{H} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$-\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{E}}_0 + \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Mit der Abkürzung $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ erhält man also die zwei gleichartigen linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{6}$$

Sie haben u. a. homogene ebene Wellen als Lösung, die sich zweckmäßig in kartesischen Koordinaten beschreiben lassen. Wir setzen die Feldvektoren mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen f und g als in Richtung \mathbf{k} laufende Wellen an:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \tag{7}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \tag{8}$$

\mathbf{H}_0 , \mathbf{E}_0 und \mathbf{k} seien räumlich und zeitlich konstant. Die Faktoren f und g seien so gewählt, daß $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{E}_0$ ist. Die Geschwindigkeit, mit der sich jede Phase der Wellen in \mathbf{k} -Richtung ausbreitet, ergibt sich aus der Bedingung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{const}$ oder

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \omega = 0.$$

Diese vollständige Ableitung liefert mit $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ die Beziehung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$ oder

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

Mit diesem Ansatz werden die Wellengleichungen (5) und (6) zu

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^2 f'' &= \frac{\omega^2}{c^2} f'' \\ \mathbf{k}^2 g'' &= \frac{\omega^2}{c^2} g''\end{aligned}$$

Zwischen Wellenzahlvektor \mathbf{k} und Frequenz ω muß also der Zusammenhang

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

bestehen. Wie die Lösung zeigt, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \omega/|\mathbf{k}| = c$ nicht von der Frequenz ab. Dem entspricht ein konstanter Brechungsindex $n := c/v = 1$. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind gleich.

Für die bei der Separation verlorengegangene Beziehung zwischen \mathbf{H} und \mathbf{E} müssen die ursprünglichen Rotationsgleichungen herangezogen werden. Sie liefern

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 f' = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 g'$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 g' = +\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 f'$$

Die Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} , der Magnetfeldvektor \mathbf{H} und der elektrische Feldvektor \mathbf{E} stehen also paarweise senkrecht aufeinander, und die Ableitungen der Wellenfunktionen f und g haben bis auf einen konstanten Faktor das gleiche räumliche und zeitliche Verhalten. Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $-\mathbf{E}_0$ und die zweite mit \mathbf{H}_0 , so liefert ihr Quotient

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0 f'^2 = \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{E}_0 g'^2.$$

Wegen der Wahl von \mathbf{H}_0 und \mathbf{E}_0 ist damit $f'^2 = g'^2$. Deshalb sind die Ableitungen f' und g' bis möglicherweise aufs Vorzeichen gleich, und f und g können sich nur um eine Konstante unterscheiden, die ein homogenes Gleichfeld zur Folge hätte, das in den Maxwell-Gleichungen nicht erscheint, da dort nur Ableitungen

vorkommen. Die Wechselfelder \mathbf{H} und \mathbf{E} haben also den gleichen räumlichen und zeitlichen Verlauf.

Die Funktion f ergibt sich aus Anfangs- und Randbedingungen. Wegen der Linearität der Wellengleichungen sind auch alle Linearkombinationen solcher Lösungen mit verschiedenen Wellenzahlvektoren \mathbf{k} , d. h. mit verschiedenen Ausbreitungsrichtungen und Wellenlängen Lösungen.

Ausgehend von

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu_0 \mathbf{H}_0$$

erhalten wir für den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{f^2}{\omega \mu_0} \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = c \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \mathbf{k}_0 = c \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \mathbf{k}_0.$$

Energie wird also in der Wellenausbreitungsrichtung $\mathbf{k}_0 := \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ durch Strahlung transportiert.

2.3 Ebene elektromagnetische Wellen in homogenen ruhenden Medien

Bei Anwesenheit von beweglichen Ladungsträgern ist in der ersten Maxwell-Gleichung eine Stromdichte \mathbf{j} zu berücksichtigen. In homogenen isotropen Medien, d. h. bei einer orts- und richtungsunabhängigen Leitfähigkeit σ , ist sie — unter dem Einfluß von Stößen — proportional zum elektrischen Feld \mathbf{E} . Eine eventuell anfangs vorhandene Raumladungsdichte ϱ ($= \operatorname{div} \mathbf{D}$) würde wegen der Leitfähigkeit σ exponentiell abklingen, denn aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \varrho$$

folgt

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t}.$$

Sind also überall gleichviele positive wie negative Ladungen, dann lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} & \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}$$

Verfährt man vorher, dann folgen statt der Wellengleichungen jetzt Telegrafengleichungen für das magnetische und das elektrische Feld:

$$\Delta \mathbf{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10)$$

Da sowohl erste wie zweite Ableitungen vorkommen, kann man nicht wie vorher verfahren, sondern wir machen einen harmonischen Ansatz

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (12)$$

aus dem sich Lösungen zu vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen durch lineare Überlagerung zusammenstellen lassen. Ebene Wellen sind zweckmäßig in kartesischen Koordinaten zu beschreiben. Damit wird $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r} = i\mathbf{k}$ und $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$, so daß die Maxwell-Gleichungen ergeben

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \varepsilon_0 \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right) \mathbf{E} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

Die Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{H} und \mathbf{E} stehen also auch jetzt senkrecht aufeinander. Die Telegrafengleichungen (9) und (10) für \mathbf{H} und \mathbf{E} werden (mit $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$) damit zu den algebraischen Gleichungen:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}}_0 \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \mathbf{H} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right) \mathbf{H} \quad (13)$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}}_0 \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right) \mathbf{E} \quad (14)$$

Als notwendige Bedingung für eine Lösung ergibt sich dabei

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right)$$

äquivalent zu

$$\omega = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 c^2 - \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2} - i \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Damit lautet die Lösung

$$(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = (\mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0) e^{i \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \sqrt{\mathbf{k}^2 c^2 - (\sigma/(2\varepsilon_0))^2} t\right)} e^{-\sigma/(2\varepsilon_0)t}.$$

Der letzte Faktor lässt die Welle also exponentiell mit der Zeit abklingen, und zwar um so schneller, je höher die Leitfähigkeit σ des Mediums ist.

2.3.1 Ein Beispiel für die Leitfähigkeit σ

Bei reeller Leitfähigkeit σ , gleichbedeutend mit starker Dissipation, d. h. Energieabgabe durch Stöße an das Medium, ist der Strom und damit die Geschwindigkeit der Ladungsträger proportional zur elektrischen Feldstärke \mathbf{E} . Wenn hingegen die Dissipation schwach ist, dann ist statt der Geschwindigkeit die Beschleunigung proportional zu \mathbf{E} , und es gilt — unter Vernachlässigung der Lorentz-Kraft — für Elektronen die Bewegungsgleichung

$$m_e \dot{\mathbf{v}} = -e \mathbf{E} = -e \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)}.$$

Hieraus folgt durch Integration über die Zeit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{e}{m_e} \frac{i}{\omega} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} &= -n_e e \mathbf{v} = i \frac{n_e e^2}{m_e \omega} \mathbf{E} =: \sigma \mathbf{E} \end{aligned}$$

Die Leitfähigkeit σ ist in diesem Fall also rein imaginär. Für \mathbf{H} und \mathbf{E} ergeben sich damit die Wellengleichungen

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{H}, \mathbf{E})) = -\mathbf{k}^2 (\mathbf{H}, \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2 \epsilon_0}\right) (\mathbf{H}, \mathbf{E})$$

(15)

mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2 \epsilon_0}}}.$$

Der Brechungsindex eines Mediums dieser Leitfähigkeit ist also

$$n \equiv \frac{c}{v_{\text{ph}}} = \sqrt{1 - \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2 \epsilon_0}}.$$

Berücksichtigt man die Lorentz-Kraft im Magnetfeld \mathbf{B} , dann ergibt sich der Brechungsindex in der allgemeineren Form (hier ohne Beweis)

$$n_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}{\omega \left(\omega \mp \frac{e B}{m_e}\right)}}.$$

Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, die Leitfähigkeit als Tensor $\tilde{\sigma}$ zu schreiben, so daß $\mathbf{j} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}$ gilt.

2.3.2 Brechung (Refraktion) elektromagnetischer Wellen

In der neutralen Erdatmosphäre durch Dichteunterschiede. Der Brechungsindex n ist reell und nimmt normalerweise mit der Höhe r ab:

$$n(r) = (n(0) - 1) e^{-\beta(r-r_0)} + 1$$

(r_0 = Erdradius, $1/\beta$ = Skalenhöhe ≈ 8 km). Hieraus resultiert eine Richtungsänderung und meistens eine Abschwächung durch Defokussierung eines gebündelten Radiostrahls. Gelegentlich, nämlich bei Inversion des Dichtegradienten, tritt auch eine Fokussierung, d. h. eine Führung in einem gewissen Höhenbereich auf und erzeugt sogenannte Überreichweiten.

Im Plasma. Der Brechungsindex ist

$$n_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \left(\omega \mp \frac{eB}{m} \right)}}$$

- Bei realem Brechungsindex n gibt es keine Abschwächung: Der Exponentialfaktor aus dem Ansatz für \mathbf{H} und \mathbf{E} lautet

$$e^{i(kx-\omega t+\alpha)} = e^{i(\omega(nx/c-t)+\alpha)}$$

- Bei imaginärem Brechungsindex n gibt es Abschwächung, aber keine Ablenkung. Der Exponentialfaktor aus dem Ansatz für \mathbf{H} und \mathbf{E} lautet

$$e^{i(kx-\omega t+\alpha)} = e^{-\omega nx/c} e^{i(-\omega t+\alpha)}$$

- Abschwächung und Ablenkung unterscheiden sich im Magnetfeld für Rechts- und Linkspolarisation.
- Ebenso unterscheiden sie sich für unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen relativ zum Magnetfeld.

Eine Plasmaschicht mit einer Dicke $z_p \gg \lambda$ ist in folgenden Frequenzbereichen für elektromagnetische Wellen undurchlässig (nach NASA TM 33-571, 1972):

Bedingung	Undurchlässigungsbereich
$\mathbf{B} = 0$	$\omega \leq \omega_p$
Rechtszirkular polarisierte Wellen, Ausbreitung parallel zu \mathbf{B}	$\omega_{zyk} \leq \omega \leq \omega_+$
Linkszirkular polarisierte Wellen, Ausbreitung parallel zu \mathbf{B}	$\omega \leq \omega_-$
Ausbreitung senkrecht zu \mathbf{B}	$\omega \leq \omega_-, \sqrt{\omega_p^2 - \omega_{zyk}^2} \leq \omega \leq \omega_+$

mit

$$\begin{aligned}\omega_p &:= \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} + \frac{n_i e^2}{\varepsilon_0 m_i}} =: \text{Plasmafrequenz} \\ \omega_{zyk} &:= \frac{|e||\mathbf{B}|}{m_e} =: \text{Zyklotronfrequenz} \\ \omega_{\pm} &:= \pm \frac{\omega_{zyk}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{zyk}}{2}\right)^2 + \omega_p^2}\end{aligned}$$

Funkverbindungen. Je höher die Elektronendichte der Ionosphäre ist, um so höher muß man eine Radiofrequenz wählen, wenn sie die Ionosphäre durchdringen soll. Die untere Grenzfrequenz f_{min} liegt erfahrungsgemäß zwischen dem Kurzwellen- und dem Ultrakurzwellenband, nämlich bei etwa 10 MHz entsprechend Elektronendichten in der Größenordnung $10^5/\text{m}^3$.

Satellitenkommunikation findet daher vorzugsweise im sogenannten S-Band und X-Band statt:

$$\begin{aligned}\text{S-Band: } &1550\text{--}5200 \text{ MHz, genutzt } 2110\text{--}2300 \text{ MHz} \\ \text{X-Band: } &5200\text{--}10900 \text{ MHz, genutzt } 7145\text{--}8500 \text{ MHz}\end{aligned}$$

Anderseits benutzt man den Kurzwellenbereich wegen der Reflektion an der Unterseite der Ionosphäre, der *Heaviside*-Schicht, für erdumspannende Funkverbindungen. Diese Schicht in der Höhe von einigen zehn Kilometern begrenzt zusam-

men mit der Erdoberfläche eine sehr dünne Ausbreitungsschale, deren Dicke nur rund ein Prozent des Erdradius beträgt.

2.4 Vektorpotentiale

Man kann \mathbf{B} und \mathbf{E} durch Potentiale \mathbf{A} und φ ersetzen. Wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ist \mathbf{B} die Rotation eines Vektors:

$$\boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}}, \quad (16)$$

denn für jeden Vektor \mathbf{a} gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0$. Damit ist – nach Vertauschung von räumlicher und zeitlicher Ableitung –

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

$\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ ist also der Gradient eines Skalars. Somit gilt

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (17)$$

Wie erhält man das Vektorpotential \mathbf{A} , wenn das Feld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ als Funktion des Ortes vorgegeben ist?

Gleichung (16) ist eine vektorielle Differentialgleichung für \mathbf{A} . Ihre Lösung ist nur bis auf einen additiven Vektor $\mathbf{A}_0 = \operatorname{grad} \psi$ bestimmt, denn für jeden Skalar ψ ist $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \psi) = 0$.

2.4.1 Vektorpotential des homogenen Magnetfeldes

Hier gilt — bei zwei verschiedenen Aufteilungen der Integrationskonstanten —

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x} + \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0\perp}) + \mathbf{A}_{0\parallel}.$$

Es ist dann nämlich (in kartesischen Koordinaten)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{(\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_0 - \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{x}}_B + \mathbf{B} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{x}}_3 - \mathbf{x} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} (3 \mathbf{B} - \mathbf{B}) = \mathbf{B}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Das \mathbf{A} -Feld umschließt das \mathbf{B} -Feld also zylinderförmig. Dabei gibt $x_{0\perp}$ die Zylinderachse an, und $A_{0\parallel}$ bewirkt eine Helixform des \mathbf{A} -Feldes.

2.4.2 Vektorpotential eines beliebigen stationären Magnetfeldes

Es gilt wegen $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$

$$\mu\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{A} = \mu\mu_0 \mathbf{j}.$$

Verfügt man durch $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (Coulomb-Eichung) jetzt auch über die Quellen von \mathbf{A} , dann verbleibt

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu\mu_0 \mathbf{j}.$$

Radiales Feld. In einem Raumbereich, in dem das Magnetfeld radial gerichtet ist, wo also

$$\mathbf{B} = B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \mathbf{x}_r \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_r := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / r \quad \text{und} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gilt, dort ist

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \frac{r_0}{r^2} \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Ein Vektorpotential \mathbf{A} , dessen Rotation das obige radiale Magnetfeld \mathbf{B} liefert, hat nach Jackson [?, Aufgabe 6.18] nur eine φ -Komponente

$$A_\varphi = B_0 r_0^2 \frac{1 - \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} = B_0 r_0^2 \frac{\tan \frac{\vartheta}{2}}{r}.$$

Seine Divergenz ist Null und genügt also der Coulomb-Eichung, und es gilt daher¹
 $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

¹Hierbei ist entweder zu beachten, daß der Laplace-Operator in seiner Form für Vektorfelder verwendet wird, oder—gleichbedeutend—er muß in der Form $\Delta \mathbf{A} = \underbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}}_0 - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{A})$ berechnet werden.

2.4.3 Wellengleichung für Vektor- und skalares Potential

Im folgenden nehmen wir im Hinblick auf die Anwendung im Weltraum vakuumähnliche Verhältnisse, d. h. $\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$ an. Schreibt man die Maxwell-Gleichung $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ mit den Potentialen \mathbf{A} und φ , dann wird daraus

$$\text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \Delta \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (18)$$

Nachdem durch $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ über die Wirbel von \mathbf{A} verfügt worden ist, wird nun durch die Lorentz-Konvention

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0} \quad (19)$$

auch über die Quellen dieses Vektorfeldes verfügt. Dies vereinfacht Gleichung (18) auf

$$\boxed{\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}.} \quad (20)$$

Ersetzt man in $\text{div } \mathbf{D} = \varrho$ die Verschiebung \mathbf{D} durch die Potentiale \mathbf{A} und φ , dann erhält man — unter Verwendung der Lorentz-Konvention — in formaler Analogie

$$\boxed{\Delta \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}} \quad (21)$$

Im Vakuum ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\varrho = 0$) vereinfachen sich die beiden Gleichungen für \mathbf{A} und φ zu Wellengleichungen einheitlicher Gestalt:

$$\boxed{\Delta(\mathbf{A}, \varphi) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2(\mathbf{A}, \varphi)}{\partial t^2}} \quad (22)$$

mit der Phasengeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

2.5 Vierervektoren

Der Raum-Zeit-Vierervektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad i^2 = -1$$

mit drei reellen und einer imaginären Komponente hat bei euklidischer Metrik

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I = \text{Einheitstensor}$$

das Quadrat

$$l^2 = x^\dagger G x = x^\dagger x = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

der Länge l , das nach dem Grundprinzip der speziellen Relativitätstheorie in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen gleich sein soll². Eine Transformation

$$x' = L x$$

zwischen zwei solchen Systemen Σ' und Σ heißt *Lorentz-Transformation*. Die Invarianz des Längenquadrats

$$x'^\dagger x' = x^\dagger L^\dagger L x \stackrel{!}{=} x^\dagger x$$

bedeutet, daß

$$L^\dagger L = E \quad \text{oder} \quad L^{-1} = L^\dagger$$

sein muß. Hierdurch ist dann auch die Invarianz des inneren Produkts und des Winkels zwischen zwei Vierervektoren gegenüber der Lorentz-Transformation L gewährleistet.

Zu einer gleichförmigen Relativbewegung in x -Richtung gehört die spezielle Lorentz-Transformation

$$L_x = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

²Das \dagger -Symbol kennzeichnet den transponierten Vektor bzw. die transponierte (gestürzte) Matrix, d. h. Spalten und Zeilen werden dadurch vertauscht.

Jede Lorentz-Transformation L kann ausgedrückt werden als

$$L = D_1 L_x D_2,$$

wobei D_1 und D_2 Drehmatrizen für den dreidimensionalen Raum sind, also die Form

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & D & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben. Alle Lorentz-Transformationen haben deshalb nur rein reelle (re) und rein imaginäre (im) Matrixelemente in der Anordnung

$$L = \begin{pmatrix} \text{re} & \text{re} & \text{re} & \text{im} \\ \text{re} & \text{re} & \text{re} & \text{im} \\ \text{re} & \text{re} & \text{re} & \text{im} \\ \text{im} & \text{im} & \text{im} & \text{re} \end{pmatrix}.$$

Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe.

2.6 Tensoren und Bilinearformen

Soll eine aus einem Tensor T zweiter Stufe gebildete Bilinearform

$$b = v^\dagger T^\dagger w$$

für beliebige Vierervektoren v und w lorentz-invariant sein, d. h.

$$v'^\dagger T' w' = v^\dagger L^\dagger T' L w \stackrel{!}{=} v^\dagger T w,$$

dann muß sich der Tensor transformieren als

$$T' = L T L^\dagger$$

Die Lorentz-Transformation eines Tensors zweiter Stufe ist also eine Ähnlichkeitstransformation einer Matrix.

2.7 Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik

Faßt man das Vektorpotential \mathbf{A} und das Skalarpotential φ zu einem Vierervektorpotential

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ i\varphi/c \end{pmatrix}$$

zusammen, dann läßt sich die Lorentz-Konvention $\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \varphi / \partial t = 0$ schreiben als

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial i\varphi/c}{\partial ict} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich mit einem Viererstromdichtevektor

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho v_x \\ \varrho v_y \\ \varrho v_z \\ i c \varrho \end{pmatrix}$$

die formal gleiche Beziehung

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_z}{\partial z} + \frac{\partial i c \varrho}{\partial ict} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

Die Ausbreitungsgleichungen für die Potentiale \mathbf{A} und φ lassen sich damit umschreiben in

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi_\nu}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 s_\nu.$$

Man kann die Feldvektoren \mathbf{B} und \mathbf{E} durch das Viererpotential ausdrücken. Hierzu definiert man den schiefsymmetrischen Tensor F (die vierdimensionale Rotation von Φ) mit den Elementen

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Durch Vergleich mit $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ erhält man

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Der Tensor hat sechs unabhängige Komponenten.

Bei einer Lorentz-Transformation wird aus F der neue Tensor

$$F' = L F L^\dagger. \quad (23)$$

Er ist ebenfalls schiefsymmetrisch:

$$F'^\dagger = (L F L^\dagger)^\dagger = L F^\dagger L^\dagger = -L F L^\dagger = -F'.$$

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich mit Hilfe des Feldstärketensors in der Form

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\mu} = \mu_0 s_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, 4) \quad (24)$$

$$\boxed{\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} = 0} \quad \left(\begin{matrix} \nu & \mu & \lambda = \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) \quad (25)$$

schreiben. Die ersten drei der Gleichungen (24) sind identisch mit

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}.$$

Die vierte Gleichung (24) entspricht

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho.$$

Die ersten drei der Gleichungen (25) entsprechen der Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

und die letzte der Gleichungen (25) ist identisch mit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

2.8 Lorentz-Transformation von \mathbf{B} und \mathbf{E}

Aus einer Transformation des Feldstärketensors im Sinne von Gleichung (23) folgen für die magnetischen und elektrischen Feldkomponenten parallel und senkrecht zur Richtung der Relativbewegung die Transformationsregeln

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\end{aligned}} \quad (26)$$

Die relativistischen Transformationsformeln für die Parallel- und Senkrechtkomponenten von \mathbf{B} und \mathbf{E} können zusammengefaßt werden zu

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} + (1 - \gamma) \underbrace{\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{\mathbf{v}^2}}_{\mathbf{B}_{\parallel}} - \gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \\ \mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} + (1 - \gamma) \underbrace{\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{\mathbf{v}^2}}_{\mathbf{E}_{\parallel}} + \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}\end{aligned}} \quad (27)$$

Bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten $v \ll c$ entsprechend $\gamma \approx 1$ vereinfachen sich die Transformationen zu

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B}' &= \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\end{aligned}} \quad (28)$$

Bei der magnetischen Feldstärke ist es also im nichtrelativistischen Fall gleichgültig, in welchem Bezugssystem man mißt. Die elektrische Feldstärke hängt jedoch deutlich vom gewählten Bezugssystem ab.

3 Bewegung geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern

3.1 Die Lorentz-Kraft

Die auch relativistisch gültige Bewegungsgleichung für Teilchen der Ladung q in elektromagnetischen Feldern lautet, wenn man die Rückwirkung der Teilchen auf die Felder vernachlässigt,

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}. \quad (29)$$

Sie ergibt sich (siehe etwa Landau-Lifschitz [?, Bd. II, §17] oder Goldstein [?, Gl. (6-49) und (6-51)]) unter Verwendung des Vektorpotentials \mathbf{A} und des skalaren Potentials φ aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} \quad (30)$$

(mit $\partial/\partial \mathbf{v} \equiv \text{grad}_v$, $\partial/\partial \mathbf{r} \equiv \text{grad}_r$) und der Lagrange-Funktion³

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \varphi) \quad (31)$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \gamma m\mathbf{v} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}.$$

Dies ist als Verallgemeinerung des mechanischen Impulses der im elektromagnetischen Feld zum Ortsvektor kanonisch konjugierte Impuls. Die rechte Seite der Lagrange-Gleichung (30) ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = q \left(\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right).$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite verwenden wir die für zwei beliebige Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} geltende Beziehung

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b}$$

³Die Form der Lagrange-Funktion ist nicht aus allgemeinen Gesetzen herzuleiten, sondern ergibt sich empirisch über die Folgerungen.

und berücksichtigen, daß \mathbf{v} nicht explizit von \mathbf{r} abhängt. Mit der Beziehung $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ erhalten wir

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Die Lagrange-Gleichung (30) wird damit zu

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - q \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}.$$

Mit

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

und

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$$

ergibt sich schließlich die Formel (29).

Die Herleitung aus der Lagrange-Gleichung und der Lagrange-Funktion (31) ist kein Beweis für die Bewegungsgleichung. Als Folgerung des Lagrange-Formalismus kann sie umgekehrt zu dessen Überprüfung dienen.

Die Kraft $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ heißt Lorentz-Kraft. Sie ist auch im Labor leicht nachzuweisen.

Die Bewegungsgleichung (37) läßt sich in einigen Fällen analytisch lösen, in gewissen anderen, relativ einfach erscheinenden jedoch nicht, so daß dann Näherungsverfahren oder numerische Lösungen herangezogen werden müssen. Einige Beispiele für zwar einfach erscheinende, dennoch aber bisher nicht analytisch zu behandelnde Situationen sind im Anhang D aufgeführt.

3.1.1 Beispiel für die Bedeutung der Lorentz-Kraft

Bei einem neutralen Wasserstoffatom der Masse m , das sich auf der Erdbahn im Abstand R nach dem Gravitationsgesetz um die Sonne mit der Masse M bewegt, stehen Zentrifugalkraft

$$f_z = m \frac{v^2}{R} \tag{32}$$

und Anziehungskraft

$$f_g = \frac{\gamma M m}{R^2} \tag{33}$$

im Gleichgewicht. Auf ein gleichschnelles Proton der Ladung e wirkt außerdem das interplanetare Magnetfeld mit der Kraft

$$f_m = e v B. \quad (34)$$

Das Verhältnis der magnetischen zur Schwerkraft ist hier

$$\frac{f_m}{f_g} = \frac{R}{\varrho}. \quad (35)$$

Hierin ist

$$\varrho = \frac{m v}{e B} \quad (36)$$

der Gyrationsradius des Protons im Magnetfeld B . Bei einer typischen interplanetaren Feldstärke von 10 nT in der Nähe der Erdbahn und einer Geschwindigkeit von 30 km/s ist $\varrho = 33$ km. Das Verhältnis Erdbahn- zu Gyrationsradius ist dann $4.5 \cdot 10^6$. Die Lorentz-Kraft ist dann also ein Millionenfaches der Schwerkraft.

3.2 Bewegung in statischen Magnetfeldern

Für die Bewegung geladener Teilchen in einem statischen Magnetfeld B , das vom Ort abhängen darf, gilt bei Abwesenheit sonstiger Felder

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (37)$$

Ein zeitabhängiges Magnetfeld hätte wegen $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ ein elektrisches Feld zur Folge.

3.2.1 Energiesatz

Durch skalare Multiplikation mit \mathbf{p} ergibt sich die Konstanz von

$$p^2 \equiv \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2}. \quad (38)$$

Es ist nämlich

$$\frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{p}^2)}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \gamma m \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Wegen der Konstanz von $p^2 = p^2$ gilt für die Gesamtenergie

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + c^4 m^2} = \text{const}, \quad (39)$$

für den Geschwindigkeitsbetrag, der sich aus Gleichung (38) ergibt,

$$v = \frac{c^2 p}{\sqrt{c^2 p^2 + c^4 m^2}} = \frac{c^2 p}{E} = \text{const} \quad (40)$$

und den Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.} \quad (41)$$

Unter Verwendung dieser Konstanz kann die Bewegungsgleichung (37) mit der Abkürzung

$$\boldsymbol{\Omega} := -\frac{q}{\gamma m} \mathbf{B} \quad (42)$$

auf die Form

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}} \quad (43)$$

gebracht werden, die in der Mechanik für Drehbewegungen geläufig ist.

3.2.2 Homogenes Magnetfeld

Gleichung (43) entspricht bei statischem homogenem Magnetfeld \mathbf{B} der Rotation des Geschwindigkeitsvektors um die feste Feldrichtung mit konstanter ortsunabhängiger Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$. Diese vektorielle Differentialgleichung erster Ordnung für $\dot{\mathbf{x}}$ kann zu einer solchen für \mathbf{x} integriert werden. Sie lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}_0 = \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \right)}_{\dot{\mathbf{x}}_\perp} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \boldsymbol{\Omega}}_{\dot{\mathbf{x}}_\parallel = \mathbf{v}_{0\parallel}}. \quad (44)$$

Die vektorielle Integrationskonstante \mathbf{v}_0 ist dabei in zwei Komponenten aufgeteilt worden: $\mathbf{v}_{0\perp} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0) / \boldsymbol{\Omega}^2 =: -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_{0\perp}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{\Omega}$ und hat zwei Freiheitsgrade, $\mathbf{v}_{0\parallel} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0 \boldsymbol{\Omega} / \boldsymbol{\Omega}^2$ zeigt in Richtung von $\boldsymbol{\Omega}$ und hat einen Freiheitsgrad. Die Differentialgleichung (44) beschreibt die Drehung des Ortsvektors mit derselben Winkelgeschwindigkeit um eine Achse durch den Punkt $\mathbf{x}_{0\perp}$ sowie eine feldparallele Translation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{0\parallel}$.

Die Zerlegung von \mathbf{v}_0 im rechten Teil der Gleichung (44) teilt auch den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}$ in eine Komponente senkrecht und eine parallel zu $\boldsymbol{\Omega}$ auf. Man erkennt, daß die Parallelkomponente

$$\dot{\mathbf{x}}_{\parallel} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v}_{0\parallel}$$

von \mathbf{x} unabhängig ist und daher konstant bleibt.

Als *Pitchwinkel* definieren wir den Winkel α zwischen der Teilchengeschwindigkeit $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ und der Magnetfeldrichtung:

$$\alpha = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{B}).$$

Sein Kosinus

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{v \Omega} = \frac{v_{\parallel}}{v}$$

und damit der Winkel α bleiben im homogenen Magnetfeld also konstant.

Das Quadrat der Beschleunigung (43) ist wegen der Konstanz von $\dot{\mathbf{x}}^2$ (siehe (40)) und unter Berücksichtigung von (44) konstant, nämlich gleich

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}})^2 = \boldsymbol{\Omega}^2 \dot{\mathbf{x}}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\mathbf{x}})^2 = \boldsymbol{\Omega}^2 v^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0)^2 = \boldsymbol{\Omega}^2 v_{0\perp}^2$$

Den Ortsvektor können wir insgesamt schreiben als

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{r}(t)}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2}}_{\text{Querverschiebung}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} (t - t_0) \boldsymbol{\Omega}}_{\text{Paralleltranslation}} \quad (45)$$

mit dem zur Geschwindigkeit und zur Feldrichtung senkrechten Vektor

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{\Omega}^2}, \quad (46)$$

so daß

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

gilt. Zu der dreikomponentigen Integrationskonstante \mathbf{v}_0 kommen hier die vektorielle Integrationskonstante \mathbf{r} mit zwei Freiheitsgraden und die Integrationskonstante t_0 hinzu. Die Geschwindigkeitsgleichung (44) wird erfüllt, denn

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \right) + \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \boldsymbol{\Omega}.$$

Die Beschleunigungsgleichung (43) wird ebenfalls erfüllt, denn

$$\ddot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Omega} \times \left(\underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}_{\dot{\mathbf{r}}} \right) + \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} \left(\underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}}_0 \right) = 0.$$

Der Radius $\varrho = |\mathbf{r}_\perp|$ der Kreisbewegung (Gyration) ist gemäß (46) und (42)

$$\varrho = \frac{|\dot{\mathbf{x}}_\perp|}{|\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{\gamma m |\dot{\mathbf{x}}_\perp|}{|q| |\mathbf{B}|} = \frac{|\mathbf{p}_\perp|}{|q| |\mathbf{B}|} \quad (47)$$

Die dem geladenen Teilchen eigene Größe

$$R := \frac{|\mathbf{p}_\perp|}{|q|}, \quad (48)$$

also den Transversalimpuls pro Ladung, nennt man (magnetische) Steifigkeit (*engl. rigidity*) des Teilchens. Sie wird üblicherweise in der Einheit MV/c angegeben.

Die Gyrationsradius ist damit

$$\varrho = \frac{R}{B}. \quad (49)$$

Wenn man das Koordinatensystem so legt, daß $\boldsymbol{\Omega}$ in z -Richtung zeigt, dann erhält die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (44) erster Ordnung die Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \varrho \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{v}_{0y}/\Omega \\ \mathbf{v}_{0x}/\Omega \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}_{0z}(t - t_0) \end{pmatrix} \quad (50)$$

mit den sechs Integrationskonstanten \mathbf{v}_0 , ϱ , φ_0 und t_0 , und die Teilchengeschwindigkeit wird

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\varrho \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ \varrho \Omega \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \mathbf{v}_{0z} \end{pmatrix}.$$

Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem statischen homogenen Magnetfeld setzt sich daher zusammen aus

- einer konstanten Geschwindigkeitskomponente entlang dem Magnetfeld,
- einer Kreisbewegung (Gyration) um eine Achse in Feldrichtung durch den Punkt

$$\frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_0}{\boldsymbol{\Omega}^2} = \begin{pmatrix} -\mathbf{v}_{0y} \\ \mathbf{v}_{0x} \\ 0 \end{pmatrix} / \Omega$$

mit der Kreisfrequenz

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{-q}{\gamma m} \mathbf{B} = \frac{-q}{\gamma m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Das Teilchen folgt also einer Schraubenlinie. Die Drehrichtung ist ladungsabhängig. Teilchen positiver Ladung, also z. B. Protonen, drehen sich im mathematisch negativen Sinn in der x - y -Ebene, wenn der Magnettfeldvektor in z -Richtung weist. Bei nichtrelativistischen Bewegungen, d. h. wenn die kinetische Energie eines Teilchen wesentlich kleiner als seine Ruheenergie und somit $\gamma = 1$ ist, hängt die Gyrationsfrequenz nicht von der Teilchenenergie, sondern nur vom Ladungs-Masse-Verhältnis und der Magnettfeldstärke ab.

3.2.3 Stationäres radiales Magnetfeld

Die Teilchenbewegung in einem solchen Magnetfeld (es entspräche einem Monopolfeld, was es wegen der Divergenzfreiheit von \mathbf{B} nur näherungsweise in einem eingeschränkten Raumbereich geben könnte) lässt sich gut in Kugelkoordinaten beschreiben.

Es soll nun untersucht werden, ob es Lösungen der Bewegungsgleichung (37)

$$\ddot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

in einem radialen Magnetfeld gibt, bei denen sich ein Teilchen auf einem Kegelmantel um die z -Achse bewegt. Der dem radialen Magnetfeld proportionale Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ hat die Richtung von \mathbf{x}_r . Sein Betrag nimmt mit dem Quadrat des Abstandes vom Ursprung ab. Es ist also

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{-q B_s r_s^2}{\gamma m} \frac{\mathbf{x}_r}{r^2} =: k \frac{\mathbf{x}_r}{r^2}.$$

Der magnetische Fluß durch eine Schnittfläche des Kegels, deren Schnittlinie parallel zur x - y -Ebene verläuft, wäre konstant.

Auf dem Kegelmantel ändert sich ϑ nicht, so daß bei der Teilchenbewegung $\dot{\vartheta} = 0$ gilt. Dies vereinfacht den Beschleunigungsvektor zu

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \mathbf{x}_r \\ &\quad + (2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta + r \ddot{\varphi} \sin \vartheta) \mathbf{x}_\varphi \\ &\quad + (-r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \mathbf{x}_\vartheta.\end{aligned}$$

Für das Kreuzprodukt in der Bewegungsgleichung ergibt sich somit

$$\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{x}} = \frac{k}{r^2} \mathbf{x}_r \times \dot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{x}_\vartheta.$$

Beschleunigung findet daher nur in ϑ -, jedoch weder in r - noch φ -Richtung statt.

Als Bewegungsgleichung erhalten wir

$$(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \mathbf{x}_r + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \left(\frac{k}{r} - r \dot{\varphi} \cos \vartheta \right) \mathbf{x}_\vartheta = \mathbf{0}.$$

Wegen der Orthogonalität der drei Einheitsvektoren müssen deren Koeffizienten einzeln gleich Null sein. Das ergibt das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta &= 0, \\ 2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi} &= 0, \\ k - r^2 \dot{\varphi} \cos \vartheta &= 0.\end{aligned}$$

Setzen wir $\dot{\varphi}$ aus der dritten Gleichung und das daraus abgeleitete $\ddot{\varphi}$ in die zweite Gleichung ein, so ist sie identisch erfüllt. Aus der ersten Gleichung wird mit diesem $\dot{\varphi}$ die Differentialgleichung

$$r^3 \ddot{r} = k^2 \tan^2 \vartheta.$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$r(t) = \sqrt{r_s^2 + v^2(t - t_0)^2} \tag{52}$$

mit den beiden Integrationskonstanten r_s und t_0 und der Abkürzung

$$v := \frac{k \tan \vartheta}{r_s} = \frac{-q B_s r_s}{\gamma m} \tan \vartheta.$$

Offenbar ist r_s der minimale radiale Abstand des Teilchens vom Ursprung zur Zeit $t = t_0$ und somit des Spiegelpunktes. Wir setzen im folgenden $t_0 = 0$. Der konstante Ausdruck v ist, wie sich aus dem Grenzwert für $t = \infty$ ergeben wird, der Betrag der Teilchengeschwindigkeit und zeigt ihren Zusammenhang mit der Feldstärke B_s im Spiegelpunkt r_s . Die dritte Differentialgleichung ergibt für die azimutale Variable φ dann die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{r_s \sin \vartheta} \frac{1}{1 + \left(\frac{vt}{r_s}\right)^2}.$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sin \vartheta} \arctan\left(\frac{vt}{r_s}\right) + \varphi_0. \quad (53)$$

Die Integrationskonstante φ_0 ist das Teilchenazimut zur Zeit $t = 0$.

Eliminiert man die Zeitvariable, dann erhält als Teilchenbahn

$$r(\varphi) = \frac{r_s}{\cos((\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta)}. \quad (54)$$

Es gibt also im monopolartigen Magnetfeld eine Teilchenbewegung auf einem Kegelmantel.

Bei dieser Bewegung gibt es keine Kraft in radialer Richtung, also in Feldrichtung, denn die Lorentz-Kraft steht senkrecht auf der Feldrichtung. Diese Kraft hat aber eine Komponente in z -Richtung. Unter Verwendung der Beziehungen $\dot{\varphi} = vr_s/(r^2 \sin \vartheta)$, $r_s^2/r^2 = \sin^2 \alpha$, $L = r/2$ und des Einheitsvektors

$$\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in z -Richtung ist diese Komponente

$$F_z = \gamma m (\Omega \times \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{z}_0 = \gamma \frac{m}{2} v^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L} \cos \vartheta.$$

Das geladene Teilchen rotiert zur Zeit $t = 0$ mit der maximalen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(0) = v/(r_s \sin \vartheta)$ um die z -Achse. Mit zunehmender Zeit gilt

asymptotisch

$$\begin{aligned}
r(t) &\rightarrow v t, \\
\dot{r} &\rightarrow v, \\
\varphi(t) &\rightarrow \frac{\pi}{2 \sin \vartheta}, \\
\dot{\varphi} &\rightarrow 0, \\
\boldsymbol{x}(t) &\rightarrow v t \boldsymbol{x}_r(\infty), \\
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &\rightarrow v \boldsymbol{x}_r(\infty).
\end{aligned}$$

Die Bewegung wird also rein radial und strebt gegen den Azimutwert $\pi/(2 \sin \vartheta)$. Wie Gleichung (53) zeigt, ist dies der Azimutbereich, den ein Teilchen aus dem Unendlichen kommend bis zum Spiegelpunkt umläuft. Bei einem halben Öffnungswinkel des Magnetfeldkegels etwa von $\vartheta = 30^\circ$ ist dies bemerkenswerterweise nur ein halbe Umdrehung. Selbst bei $\vartheta = 14.5^\circ$ macht das Teilchen auf diesem Weg nur eine einzige Umdrehung.

Für den Pitchwinkel α , also den Winkel zwischen Magnetfeldrichtung und Geschwindigkeitsvektor, gilt

$$\cos \alpha = \boldsymbol{x}_r \cdot \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{|\dot{\boldsymbol{x}}|}$$

Unter Verwendung der Ausdrücke für $\dot{\boldsymbol{x}}$, \boldsymbol{r} , $\dot{\boldsymbol{r}}$ und $\dot{\varphi}$ erhält man

$$\cos \alpha = \frac{vt}{\sqrt{r_s^2 + (vt)^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{B}{B_s}}.$$

Demzufolge ist

$$\sin^2 \alpha = \frac{r_s^2}{r_s^2 + (vt)^2} = \frac{r_s^2}{r^2} = \frac{B}{B_s}. \quad (55)$$

Dies entspricht der Erhaltung der ersten adiabatischen Invarianten (s. u.) und zeigt, daß in diesem Fall keinerlei einschränkende Annahmen wie in der adiabatischen Näherung darüber nötig sind, wie schnell sich die Feldstärke mit dem Ort ändern darf.

Die Beziehung (55) erlaubt eine einfache Veranschaulichung der Teilchenbahn in einem monopolartigen Magnetfeld. Wickelt man den Kegelmantel, auf dem sich ein Teilchen bewegt, bis zu einem Radius $r = R$ in einer Ebene ab, erhält

man bei einem halben Kegelöffnungswinkel ϑ einen $2\pi \sin \vartheta$ weiten Kreissektor mit dem Radius R . Die Magnetfeldlinien sind Radien in diesem Kreissektor, und jede Teilchenbahn wird zu einer Geraden, die vom Mittelpunkt den kürzesten Abstand r_s hat. Sie schneidet eine Feldlinie bei dem Mittelpunktsabstand r unter dem Pitchwinkel α , und es gilt dabei

$$r_s = r \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \alpha = \left(\frac{r_s}{r} \right)^2 = \frac{B}{B_s},$$

letzteres, weil die Feldstärke B im monopolartigen Feld umgekehrt proportional zu r^2 ist.

Ein reales interplanetares Magnetfeld könnte mit gewisser Näherung durch eine Folge monopolartiger Verläufe mit verschiedenen Kegelöffnungswinkeln beschrieben werden. Was würde bei einem Übergang aus der Beziehung (55)?

Wir betrachten als Beispiel den Übergang bei $r = r_1$ von einem Kegel mit dem halben Öffnungswinkel ϑ zu einem homogenen Magnetfeld (entsprechend $\vartheta = 0$). Ein Teilchen hat unmittelbar, bevor es den Kegelteil verläßt, einen Pitchwinkel α mit

$$\cos \alpha_{\text{kegel}} = \sqrt{1 - \frac{B}{B_s}}.$$

Unmittelbar nach Eintritt in das homogene Feld z -Richtung gilt wegen der Definition der Kugelkoordinaten und des entsprechenden Ausdrucks für die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ für seinen Pitchwinkel

$$\cos \alpha_{\text{homogen}} = z_0 \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{\dot{r}}{v} \cos \vartheta = \sqrt{1 - \frac{B}{B_s}} \cos \vartheta.$$

Der Pitchwinkelkosinus verkleinert sich bei diesem Übergang also durch den Faktor $\cos \vartheta < 1$, während die Feldstärke B sich nicht ändert. Der Quotient $\sin^2 \alpha / B$ bleibt hier also *nicht* konstant, sondern ändert sich systematisch. Bei Vergrößerung des Pitchwinkels vergrößert sich bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag auch die Geschwindigkeitskomponente $v_\perp = v \sin \alpha$ senkrecht zum Feld. Damit verschiebt sich die Achse der Spiralbewegung seitlich gegenüber der Achse des Kegels, aus dem das Teilchen kommt. Dieser Elementarprozeß ermöglicht eine Diffusion der Teilchen quer zur Richtung des Magnetfeldes.

Teilchen-diffusion quer zum Magnetfeld

3.3 Drift

Wir betrachten jetzt die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem statischen homogenen Magnetfeld, in dem eine zusätzliche Kraft \mathbf{F} , z. B. das Gewicht oder eine elektrostatische Kraft wirkt. Sie ist in der Bewegungsgleichung zu ergänzen, wobei wir sie in einen Anteil \mathbf{F}_{\parallel} parallel und einen Anteil \mathbf{F}_{\perp} senkrecht zum Magnetfeld \mathbf{B} zerlegen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{B}.$$

Schreibt man die senkrechte Zusatzkraft als

$$\mathbf{F}_{\perp} = -q \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}, \quad (56)$$

dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} - \mathbf{v}_D) \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_{\parallel}. \quad (57)$$

Die darin eingeführte Driftgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (58)$$

ist unabhängig von Masse und Energie des Teilchens. Sie verformt Kreisbahnen zu Trochoiden⁴. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 gezeigt. Wegen des Faktors $1/q$ driften Protonen und Elektronen in entgegengesetzte Richtungen. Eine Kraft mit einem Anteil senkrecht zu \mathbf{B} bewirkt daher einen Strom.

Der erste Term rechts in der Bewegungsgleichung (57) entspricht dem schon bekannten Fall einer schraubenförmigen Bewegung um die Feldrichtung, jedoch in einem Bezugssystem, das mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_D senkrecht zum Feld driftet. In diesem mitdriftenden Bezugssystem gibt es keine Kraft senkrecht zum Magnetfeld, und die Komponente der Teilchengeschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld hat einen konstanten Betrag. Im ursprünglichen System oszillieren der Betrag der Geschwindigkeit und die Teilchenenergie, beides bleibt aber im Mittel über eine Gyration konstant. Die feldparallele Kraft \mathbf{F}_{\parallel} ganz rechts in der Bewegungsgleichung führt zu einer Beschleunigung in Feldrichtung. Bei fehlender feldparalleler Zusatzkraft ist die Teilchenenergie in diesem System konstant.

⁴Als *Trochoide* bezeichnet man eine gestreckte oder verkürzte Zykloide.

Abbildung 1: Drift geladener Teilchen im Magnetfeld mit zusätzlicher Kraft. Das Magnetfeld sei senkrecht zur Zeichenebene. Aus einer Kreisbahn (in der Projektion auf die Zeichenebene) wird eine Trochoide.

3.3.1 Drift durch Gravitation

Ein Proton bewege sich im Erdmagnetfeld bei $B = 10 \mu\text{T}$. Das Feld sei parallel zur Erdoberfläche. Dann driftet das Proton durch sein Gewicht mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{q B^2},$$

worin

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

ist. Man erhält für den Betrag

$$v_D = \frac{mg}{eB} \approx 1 \text{ cm/s.}$$

Elektronen driften wegen ihres geringeren Gewichts etwa 2000 mal langsamer.

3.3.2 Drift durch elektrostatische Kraft

Wenn die Zusatzkraft elektrostatisch ist, also

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E},$$

dann ist die Driftgeschwindigkeit

$$v_D = \frac{q \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{q B^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

In diesem Fall ist die Driftrichtung *unabhängig* von der Teilchenladung. Protonen und Elektronen driften dann mit derselben Geschwindigkeit in dieselbe Richtung. Ein elektrisches Feld senkrecht zu einem Magnetfeld bewirkt daher keinen Strom.

In einem Bezugssystem, das sich mit der Drift $v_D = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ mitbewegt, hat das elektrische Feld keine Komponente mehr in Richtung des \mathbf{B} -Feldes. Es ist nämlich dort

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + v_D \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{E} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}}{B^2} \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}}{B^2} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Dies ist die Komponente von \mathbf{E} parallel zu \mathbf{B} . Sie ist Null, wenn \mathbf{E} senkrecht zu \mathbf{B} ist.

Ein interessanter Spezialfall liegt vor, wenn $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ist. Dann reduziert sich die Bewegungsgleichung auf $d\mathbf{p}/dt = 0$. Ein mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} injiziertes Teilchen bewegt sich dann geradlinig weiter. Dies gilt unabhängig von der Ladung und der Masse des Teilchens. Die Bewegung quer zum Magnetfeld besteht dann nur aus einer Drift mit dem Geschwindigkeitsbetrag E/B und enthält keine Drehung mehr.

3.4 Näherungslösungen der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (43) für geladene Teilchen lässt sich bei ortsabhängigen Magnetfeldern $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ nur in speziellen Fällen analytisch lösen. Näherungslösungen, die etwa auf einer Taylor-Entwicklung um die Anfangsbedingungen basieren,

sind nur für Bruchteile einer Gyrationperiode sinnvoll. Ähnliche Schwierigkeiten gibt es bei numerischen Lösungen. Daher ist eine andere Näherung nötig: die *adiabatische* oder Führungszentrumsnäherung.

3.4.1 Das Führungszentrum

In einem Koordinatensystem, das sich mit der Komponente \dot{x}_{\parallel} der Teilchengeschwindigkeit gleichförmig in Magnetfeldrichtung bewegt, wird aus der schraubenförmigen Bewegung eines geladenen Teilchens eine Kreisbahn. Man sagt, das Koordinatensystem bewege sich mit dem *Führungszentrum* (*engl. guiding center*) des Teilchens. Die adiabatische Näherung geht von dieser kreisförmigen Bewegung um das Führungszentrum aus und setzt voraus, daß sich das Feld während einer Gyrationperiode nur schwach ändert. Im Sinne einer Störungsrechnung wird dann die sich überlagernde Drift des Führungszentrums untersucht.

Im ursprünglichen Koordinatensystem liegt der Krümmungsmittelpunkt i. a. nicht im Zentrum der Schraubenbahn. Der Krümmungsradius wird nämlich um so größer, je größer mit \dot{x}_{\parallel} die Steigung wird. Der Krümmungsmittelpunkt läuft dann ebenfalls auf einer Schraubenlinie um die Gerade, auf der sich das Führungszentrum bewegt. Dies wird in Abb. 2 gezeigt.

3.4.2 Gradientendrift

Eine Drift senkrecht zur Feldrichtung gibt es auch ohne zusätzliche Kraft, und zwar dann, wenn sich der Betrag B der Magnetfeldstärke senkrecht zu \mathbf{B} ändert. In Richtung abnehmender Feldstärke nimmt die Lorentz-Kraft ab. Der Gyrationradius eines geladenen Teilchens wird deshalb dort größer als auf der gegenüberliegenden Seite. Aus einer Kreisbahn wird deshalb eine Bahn, die einer Trochoide ähnelt. Sie unterscheidet sich in zweierlei Hinsicht jedoch von den Trochoiden, die in einem homogenen Magnetfeld mit dazu senkrechter Zusatzkraft entstehen: Die Bahngeschwindigkeit bleibt hier konstant, und die Bahnform, die vom Verlauf des Feldgradienten bestimmt wird, weicht im allgemeinen von einer exakten Trochoide ab. Das Teilchen driftet senkrecht zu \mathbf{B} und senkrecht zum Feldgradienten

Abbildung 2: Teilchenbahn, Bahn des Führungszentrums und Bahn des Krümmungsmittelpunktes für ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld.

∇B , wobei die Driftrichtung vom Ladungsvorzeichen abhängt. Die Teilchen bleiben dabei im Mittel auf Ebenen konstanter Feldstärke.

Die Gradientendrift lässt sich näherungsweise berechnen, wenn sich die Feldstärke innerhalb eines Gyrationsskreises nur wenig ändert. Das Magnetfeld liege in z -Richtung und sein Gradient in $-y$ -Richtung. Die Bahn eines Teilchens mit der Ladung q ist dann nahezu ein Kreis oder eine Spirale um die Feldrichtung. Ihr Radius ist

$$\varrho = \frac{mv_{\perp}}{qB_0}.$$

Die Gyrationsphase φ sei so definiert, daß $\varphi = 0$ der maximalen Auslenkung in

$+y$ -Richtung entspricht. Für die Feldstärke können wir dann schreiben

$$B = B_0 - \nabla B y = B_0 - \nabla B \varrho \cos \varphi.$$

Das Teilchen spürt eine Lorentz-Kraft mit dem Betrag

$$f = qv_{\perp}B = qv_{\perp}(B_0 - \nabla B \varrho \cos \varphi).$$

Mitteln wir diese Zentralkraft über eine Gyrationperiode, dann erhalten wir für die x -Komponente aus Symmetriegründen Null. Die y -Komponente $f_y = f \cos \varphi$ hingegen ergibt den Mittelwert

$$\langle f_y \rangle = \frac{qv_{\perp}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (B_0 - \nabla B \varrho \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = -\frac{m}{2} v_{\perp}^2 \frac{\nabla B}{B_0}.$$

Diese Kraft ist also entgegengesetzt zum Gradienten der magnetischen Feldstärke und bewirkt eine Driftgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_D = \frac{m}{2} v_{\perp}^2 \frac{\nabla B}{B} \times \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

(59)

Geladene Teilchen driften also im inhomogenen Magnetfeld senkrecht zur Feldrichtung und senkrecht zum Feldgradienten. Die Driftgeschwindigkeit ist proportional zur Teilchenenergie. Positive und negative Ladungsträger driften entgegen gesetzt.

Die verwendete Mittelung setzt natürlich voraus, daß die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ konstant ist. Dies wäre nicht mehr gewährleistet, wenn sich die Feldstärke längs des Gyrationsradius merklich ändert. Eine strenge Lösung der Bewegungsgleichung ist in diesem Fall jedoch schwierig.

3.4.3 Krümmungsdrift

Das Führungszentrum möge einer gekrümmten Feldlinie folgen. Ihr Krümmungsradius sei R . Dadurch entsteht eine Fliehkraft senkrecht zu \mathbf{B} mit der Stärke

$$F = \frac{mv_{\parallel}^2}{R}.$$

Sie bewirkt eine Driftgeschwindigkeit mit dem Betrag

$$v_D = \frac{m v_{\parallel}^2}{R q B}.$$

In strom- und damit wirbelfreien Magnetfeldern sind Feldgradient $\nabla_{\perp} B$ und Radiusvektor \mathbf{R} antiparallel. Der Krümmungsradius R ist dort gleich dem inversen relativen Gradienten der Feldstärke. Aus $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ folgt nämlich für ein kleines Flächenstück, in dem bogenförmig gekrümmte Feldlinien verlaufen,

$$\mathbf{B}(R + \delta R) \cdot (R + \delta R) = \mathbf{B}(R) \cdot R.$$

Hiermit kann man den negativen relativen Feldgradienten ausdrücken als

$$-\lim_{\delta R \rightarrow 0} \frac{\frac{B(R + \delta R) - B(R)}{\delta R}}{B(R)} = -\lim_{\delta R \rightarrow 0} \frac{\frac{R}{R + \delta R} - 1}{\frac{\delta R}{R}} = \frac{1}{R}.$$

Gradienten- und Krümmungsdrift haben die gleiche Richtung und können zusammengefaßt werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{GK}} &= \frac{m}{2qB} (v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2) \frac{\mathbf{B}}{B} \times \frac{\nabla_{\perp} B}{B} \\ &= \frac{m}{2qB} v^2 (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\mathbf{B}}{B} \times \frac{\nabla_{\perp} B}{B}. \end{aligned} \tag{60}$$

Die adiabatische Näherung setzt hier voraus, daß $\nabla_{\perp} B \ll B$ ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Krümmungsradius $R = B / \nabla_{\perp} B$ sehr viel größer als der Gyrationstrajektor ϱ ist. Mit zunehmender Teilchenenergie wird dies immer schlechter erfüllt.

3.4.4 Teilchenbewegung nahe einer magnetischen Grenzschicht

Als Beispiel, bei dem die adiabatische Näherung *nicht* angewendet werden kann, betrachten wir eine Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene, das oberhalb und unterhalb einer Grenzschicht entgegengesetztes Vorzeichen hat. Für Teilchen nahe dieser Grenzschicht ändert sich das Feld bereits während einer halben Gyrationperiode drastisch. Aus Zykloidenbewegungen werden, wie Abbildung 3 zeigt, wellenförmige Bahnen entlang der Grenzschicht.



Abbildung 3: Teilchenbahn nahe einer magnetischen Grenzschicht

Dies deutet an, wie im Detail eine Stromschicht in einer magnetischen Tangentialdiskontinuität strukturiert ist. Zu berücksichtigen ist allerdings, daß jede Gyrationsbewegung das Führungsfeld schwächt. Dadurch ergibt sich qualitativ, daß ein ‘Sprung’ in der Feldstärke sich stetig über eine Strecke von der Größenordnung eines Gyrationsradius der beteiligten Teilchen erstreckt.

3.4.5 Feldstärkeänderungen in Feldrichtung

Wenn sich die Magnetfeldstärke in Feldrichtung ändert, wenn also die Feldlinien auseinander- oder zueinanderstreben, dann gilt bei ausreichend schwacher Änderung — wie gezeigt werden soll — für den Winkel α , den die Flugrichtung eines geladenen Teilchens mit der Feldrichtung bildet, also für seinen Pitchwinkel,

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{1}{B_s}. \quad (61)$$

Bei der Feldstärke B_s ist $\sin^2 \alpha = 1$ und die feldparallele Komponente seines Impulses hiernach gleich Null. Dieser Punkt wird *magnetischer Spiegelpunkt* genannt. Gebiete mit $B > B_s$ sind für das Teilchen nicht erreichbar. Mit abneh-

mender Feldstärke B wird α kleiner: die Teilchengeschwindigkeit *fokussiert* sich daher in Feldrichtung. Mit zunehmender Feldstärke hingegen nimmt der Sinus des Pitchwinkels bis maximal Eins zu entsprechend einem maximalen Pitchwinkel von 90° . Das Teilchen gyriert momentan auf der Stelle, um dann wieder in Richtung schwächeren Feldes zurückzulaufen, denn die Lorentz-Kraft hat dort — wie überall in einem divergierenden Feld — eine Komponente in Richtung auf abnehmende Feldstärke (s. Seite 40.). Die Invarianz von $\frac{\sin^2 \alpha}{B}$ lässt sich im Sinne der adiabatischen Näherung folgendermaßen herleiten:

Der Gyrationsradius eines geladenen Teilchens bei der Feldstärke B ist

$$\varrho = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{p_\perp}{qB}.$$

Im Spiegelpunkt gilt speziell

$$\varrho_s = \frac{p}{qB_s}.$$

Es ist also

$$\frac{\varrho}{\varrho_s} = \frac{p_\perp}{p} \frac{B_s}{B}.$$

Betrachten wir jetzt in einem räumlich schwach veränderlichen Feld ein Volumen, das durch den Gyrationssatz im Spiegelpunkt, die davon ausgehenden Feldlinien und einen dazu senkrechten Kreis durch diese Feldlinien um das momentane Führungszentrum des Teilchens bei einer Feldstärke B begrenzt ist, dann folgt für den magnetischen Fluß Φ durch die Kreisflächen aus $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ mit dem Gaußschen Satz

$$\pi \varrho_s^2 B_s = \pi \varrho^2 B.$$

Bei der Feldstärke B muß ϱ der Radius des dortigen Gyrationssatzes sein, denn sonst würde das Teilchen auf seinem Weg vom Spiegelpunkt eine Änderung des magnetischen Flusses erfahren. Sie wäre mit einer Änderung der Teilchenenergie verbunden. Dies aber stünde im Widerspruch zu der Tatsache, daß die als einzige wirkende Lorentz-Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht und somit die kinetische Teilchenenergie konstant bleibt. Die Teilchenbewegung definiert physikalisch eine *magnetische Flußröhre* mit konstantem magnetischem Fluß, aber variablem Querschnitt.

Verwendet man die vorletzte Gleichung in der letzten, um den Gyrationsradius zu eliminieren, so erhält man

$$\frac{p^2}{B_s} = \frac{p_\perp^2}{B}.$$

Aus $\sin \alpha = \frac{p_\perp}{p}$ folgt die herzuleitende Invarianz

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{1}{B_s}.$$

Vorausgesetzt wurde, daß sich die Feldstärke B und damit der Gyrationsradius bei einer Gyration nicht wesentlich ändern. Im Spiegelpunkt ist dies natürlich erfüllt. Dort aber, wo das Feld schwächer und der Pitchwinkel wesentlich kleiner als 90° ist, beschreibt das Teilchen eine längliche schraubenförmige Bewegung, so daß es während einer Gyrationsperiode eine beträchtliche Strecke entlang dem Feld zurücklegt, innerhalb derer sich die Feldstärke im Sinne dieser Näherung nicht zu sehr ändern darf. Es sei jedoch auf die strenge Lösung der Bewegungsgleichung für ein radiales Magnetfeld im Abschnitt 3.2.3 verwiesen, die zeigt, daß trotz dieser Bahnform die Invarianz gewährleistet bleibt. Man bezeichnet den Ausdruck $\frac{\sin^2 \alpha}{B}$ als *erste adiabatische Invariante*.

Ein auf dem Radius ϱ und mit der Kreisfrequenz $\omega = qB/m$ gyrierendes geladenes Teilchen verkörpert einen Strom

$$I = \frac{q\omega}{2\pi} = \frac{q^2 B}{2\pi m}.$$

Zu ihm gehört ein magnetisches Moment

$$M_n = \frac{q^2 B}{2\pi m} \pi \varrho^2 = \frac{q^2 B}{2m} \frac{p_\perp^2}{q^2 B^2} = \frac{p_\perp^2}{2mB}.$$

Es ist $M = \gamma M_n$. M kann daher als ‘relativistisches’ magnetisches Moment bezeichnet werden.

Das interplanetare Magnetfeld nimmt mit dem Abstand von der Sonne ab. Geladene energiereiche Teilchen von der Sonne würden im interplanetaren Raum also nach kurzem Flug sehr eng um die Feldrichtung gebündelt sein. Messungen ihrer Pitchwinkelverteilungen zeigen jedoch, daß dies meistens nicht der Fall ist. Hieraus ist zu schließen, daß das Magnetfeld dort eine rauhe, unregelmäßige Komponente haben muß, die die Regeln der adiabatischen Ausbreitung verletzt.

Longitudinalkraft im divergenten Magnetfeld. Wie groß ist die Kraft in Richtung abnehmender Feldstärke? Wir betrachten dazu eine kegelförmige Flußröhre, die zu der tatsächlichen Flußröhre, auf deren Oberfläche sich ein geladenes Teilchen bewegt, am zu untersuchenden Ort tangential verläuft. Bezeichnen wir ihren halben Öffnungswinkel mit φ , dann ist, wie man der Abb. 4 entnimmt, die Lon-

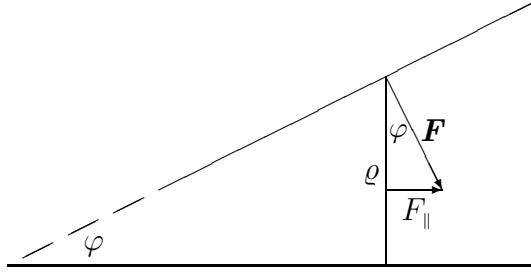


Abbildung 4: Zur Berechnung der Longitudinalkraft auf ein geladenes Teilchen im divergenten Magnetfeld.

gitudinalkomponente der Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ bei einem Pitchwinkel α gleich

$$F_{\parallel} = F \sin \varphi = q v B \sin \alpha \sin \varphi$$

Der halbe Kegelöffnungswinkel φ steht mit dem Flußröhrenradius $\rho = p_{\perp}/(qB)$ und der Magnetfeldstärke B in dem Zusammenhang

$$\sin \varphi = \frac{\rho}{x} = \frac{p \sin \alpha}{q B x} = \frac{\gamma m v \sin \alpha}{q B x}.$$

Die Kraft ist mit $\sin \alpha = B/B_s = x_s^2/x^2$ (im radialen Feld wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) und mit $\mu := \cos \alpha$

$$F_{\parallel} = \frac{\gamma m v^2 x_s^2}{x^3}.$$

Diese zum schwächeren Feld hin wirkende Kraft ist also am größten im Spiegelpunkt und geht gegen Null, wenn sich die Flugrichtung der Feldrichtung nähert.

Dieser Kraft lässt sich ein Potential

$$V(x) = - \int_{\infty}^x F_{\parallel}(\xi) d\xi = \frac{\gamma m}{2} v^2 \frac{x_s^2}{x^2} = \frac{\gamma m}{2} v_{\perp}^2$$

zuordnen. Das so definierte Potential ist bei $x = \infty$ gleich Null und hat im Spiegelpunkt den Wert $\gamma mv^2/2$. Die Lagrange-Funktion für die Bewegung entlang der Flußröhre — also bei Mittelung der Gyrationseinflüsse — ist

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{\gamma m}{2} v^2 \left(1 - \frac{B}{B_s}\right) = \frac{\gamma m}{2} v^2 \mu^2.$$

Dementsprechend ist der zur longitudinalen Ortskomponente x kanonisch konjugierte Impuls

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(v\mu)} = \gamma v \mu.$$

3.4.6 Strahlungsgürtel

Im Dipolfeld etwa der Erde nimmt die Feldstärke vom Äquator zu den Polen zu. Geladene Teilchen, die von der Äquatorebene nach Norden oder Süden fliegen, vergrößern also ihren Pitchwinkel, bis sie je nach äquatorialem Pitchwinkel ihren Spiegelpunkt x_s erreichen. Von dort fliegen sie durch die Äquatorebene zurück bis zu einem Spiegelpunkt in der gegenüberliegenden Hemisphäre. An jedem Punkt x entlang dieses Weges gilt wegen der Erhaltung der ersten adiabatischen Invarianten (siehe Abschnitt 3.4.5)

$$\frac{\sin^2 \alpha(x)}{B(x)} = \frac{1}{B(x_s)}.$$

Spiegelfeldstärke und Lage der Spiegelpunkte sind *unabhängig* von Teilchenladung, -masse und -energie, jedoch festgelegt z. B. durch die Feldstärke und den Pitchwinkel in der Äquatorebene.

Die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht und parallel zum Magnetfeld sind als Funktion des Ortes x entlang der Feldrichtung

$$v_{\perp}(x) = v \sin \alpha(x) = v \sqrt{\frac{B(x)}{B_s}},$$

$$v_{\parallel}(x) = v \cos \alpha(x) = v \sqrt{1 - \frac{B(x)}{B_s}}.$$

Im Dipolfeld gibt es also außer der Gyration mit der Periode $T_{\text{gyration}} = 2\pi/\omega = 2\pi m/(e B)$ eine zweite periodische Bewegung geladener Teilchen, nämlich

eine Hin- und Herbewegung (*engl.* bounce) zwischen einem nördlichen und einem südlichen Spiegelpunkt. Die Bounce-Periode ist

$$T_{\text{bounce}} = 2 \int_{x_s}^{x'_s} \frac{dx}{v_{\parallel}(x)} = \frac{2}{v} \int_{x_s}^{x'_s} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{B(x)}{B_s}}}.$$

Wenn der äquatoriale Pitchwinkel nicht zu spitz ist und entsprechend die Spiegelpunkte nicht allzu weit vom Äquator entfernt liegen, dann ist die Bounce-Bewegung harmonisch. Die Feldstärke kann dann nämlich um den Äquator (gekennzeichnet durch den Index 0) herum ausreichend genau als Taylor-Reihe bis zum quadratischen Glied geschrieben werden, wobei der lineare Koeffizient dort im Minimum der Feldstärke Null ist:

$$B(x) = B_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right)_0}_{a_0} x^2$$

Angewandt auf die Spiegelpunkte ergibt das deren Lage

$$x_s^2 = \frac{2}{a_0} (B_s - B_0) = \frac{2}{a_0} \left(B_s - B_s (1 - \mu_0^2) \right) = \frac{2 B_s}{a_0} \mu_0^2$$

$$\text{mit } \mu_0 = \cos \alpha_0 = \sqrt{1 - B_0/B_s}.$$

Für die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Feld ergibt die quadratische Entwicklung des Feldes

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= v \sqrt{1 - \frac{B(x)}{B_s}} = v \sqrt{1 - \frac{B_0}{B_s} - \frac{a_0}{2 B_s} x^2} \\ &= v \sqrt{1 - \frac{B_0}{B_s} - \frac{x^2}{x_s^2} \mu_0^2} = v \sqrt{1 - \frac{B_0}{B_s} - \frac{x^2}{x_s^2} \left(1 - \frac{B_0}{B_s} \right)} \\ &= v \sqrt{1 - \frac{B_0}{B_s}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_s} \right)^2} \equiv v_{\parallel 0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_s} \right)^2}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation erhalten wir die Beschleunigung

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = v_{\parallel 0} \frac{1}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_s} \right)^2}} \left(-2 \frac{x}{x_s} \right) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_{\parallel}} \frac{1}{x_s} = -\frac{v_{\parallel 0}^2}{x_s^2} x.$$

Sie ist also der Auslenkung proportional und ihr entgegengerichtet. Wir haben es mit der Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators zu tun. Eine Lösung

Abbildung 5: Typische äquatoriale Pitchwinkelverteilung geladener Teilchen im Dipolmagnetfeld der Erde, dargestellt links als Polardiagramm $j_1(\alpha)$ und rechts als Funktion $j_2(\cos \alpha)$.

ist

$$x(t) = x_s \cos \omega t$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = v_{\parallel 0}/x_s$ und der entsprechenden Periode

$$T_{\text{bounce}} = 2\sqrt{2}\pi \frac{\sqrt{B_s/a_0}}{v}.$$

Ist der äquatoriale Pitchwinkel kleiner als für diese Näherung zulässig, dann ergibt sich immer noch eine periodische, jedoch nicht mehr harmonische Hin- und Herbewegung zwischen Nord und Süd, die mathematisch nur aufwendiger zu erfassen ist. Die Spiegelpunkte nähern sich dann mehr den Polen.

Wird der äquatoriale Pitchwinkel noch kleiner, dann wandern die Spiegelpunkte im Fall des Erdmagnetfeldes bis hinab in die Atmosphäre, und solche Teilchen werden dort absorbiert. Die übrigen Teilchen jedoch sind im Magnetfeld, soweit es ausreichend dipolähnliche, geschlossene Feldlinien hat, stabil gefangen. Für die äquatoriale Pitchwinkelverteilung ergibt sich daher eine wie in Abbildung 5 gezeigte Form.

Die Bewegung geladener Teilchen in einem Dipolfeld hat also drei periodische Komponenten:

- die Gyration um eine Feldlinie,
- die Bounce-Bewegung zwischen zwei Spiegelpunkten,

- die Krümmungs- und Gradientendrift der Bounce-Bahn um die Erde.

Für deren Perioden gilt

$$T_{\text{gyration}} \ll T_{\text{bounce}} \ll T_{\text{drift}}.$$

3.4.7 Adiabatische Invarianten

Zu allen drei periodischen Bewegungstypen geladener Teilchen in dipolähnlichen Magnetfeldern gehören *adiabatische Invarianten* genannte Größen. Sie bleiben unter gewissen Voraussetzungen konstant.

- Die erste von ihnen,

$$M = \frac{p_{\perp}^2}{2 m_0 B},$$

von der Dimension eines magnetischen Moments, bleibt bei der Bounce-Bewegung zwischen Nord und Süd, aber auch z. B. bei der nichtperiodischen Bewegung energiereicher geladener Teilchen aus Sonnenausbrüchen (Flares) von der Sonne hinaus in den interplanetaren Raum erhalten, wenn sich nur die Feldstärke während einer Gyration langsam genug ändert, d. h. wenn

$$T_{\text{gyration}} \frac{dB/dt}{B} \ll 1$$

gilt. Die Invarianz bewirkt anschaulich gesprochen, daß ein Teilchen immer dieselbe Zahl von Feldlinien umkreist, auch wenn deren Dichte örtlich variiert.

- Während der Drift eines geladenen Teilchen um die Erde bleibt die Größe

$$J = \oint p_{\parallel} ds = \oint p \cos \alpha(s) ds$$

erhalten. Sie hat die Dimension einer Wirkung. Das Integral ist über eine Bounce-Periode zu bilden. Voraussetzung für die Invarianz ist, daß sich das Magnetfeld während dieser Periode langsam genug ändert, d. h. wenn

$$T_{\text{bounce}} \frac{dB/dt}{B} \ll 1$$

gilt. Da diese Periode wesentlich länger ist als die Gyrationsperiode, ist diese zweite Invarianz schwieriger zu gewährleisten als die erste. Die zweite Invarianz sorgt dafür, daß ein Teilchen bei seiner Bounce-Bewegung seine Spiegelpunkte immer wiederfindet.

- Die Größe

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot df = \iint \mathbf{B} \cdot df,$$

zu integrieren entlang einer geschlossenen Kurve, die in einer Driftschale liegt, bewirkt bei Invarianz, daß ein Teilchen nach seiner Drift um die Erde seine alte Flußröhre wiederfindet. Die Bounce-Linie des Führungszentrums beschreibt dadurch eine tonnenförmige Mantelfläche. Die wiederum schwierigere Bedingung für diese dritte Invarianz ist

$$T_{\text{drift}} \frac{dB/dt}{B} \ll 1.$$

Es gibt im — durch den Sonnenwind verformten — Dipolfeld der Erde Bereiche, in denen alle drei Invarianzen gut erfüllt sind. Andererseits gibt es Gebiete, in denen die Voraussetzungen für die Invarianzen teilweise verletzt sind. Die ersten Gebiete sind in der Lage, geladene Teilchen dauerhaft zu speichern. Bei adiabatischer Bewegung können geladene Teilchen dort weder hinein- noch hinausgelangen, und sie ändern ihre Energie nicht.

Die Theorie der adiabatischen Bewegung sagt nicht, wie geladene Teilchen in die Speichergebiete hineingeraten (und vielleicht auch wieder entweichen) können. Tatsächlich sind sehr hohe Intensitäten energiereicher Protonen und Elektronen im sogenannten Strahlungsgürtel der Erde, nach seinem Entdecker auch *van-Allen-Gürtel* genannt, vorhanden. Interessant sind daher Verletzungen der Adiabatenvoraussetzungen.

- Eine Verletzung der dritten adiabatischen Invarianten bringt Teilchen nach einer Drift um die Erde auf eine andere Driftschale (*engl. shell splitting*). Dadurch wird in gewissen Bereichen der Magnetosphäre eine radiale Bewegung möglich.

- Eine Verletzung der zweiten adiabatischen Invarianten verschiebt die Spiegelpunkte und kann zum Teilchenverlust durch Absorption in der Atmosphäre führen.
- Eine Verletzung der ersten adiabatischen Invarianten kann Teilchen auf andere Flußröhren versetzen oder den (etwa äquatorialen) Pitchwinkel verändern.

3.4.8 Pitchwinkelstreuung

Während die rein adiabatische Bewegung völlig deterministisch ist, bringen Feldunregelmäßigkeiten, die die Adiabatenbedingungen verletzen, eine stochastische, d. h. unvorhersagbare Komponente in die Bewegung. Solche Irregularitäten bewirken primär Änderungen des Pitchwinkels, und zwar dann besonders wirksam, wenn sie räumlich und zeitlich in *Resonanz* mit der Gyration sind. Die Häufung von Pitchwinkelstreuungen führt zu einer *Diffusion im Pitchwinkel*. Sie bedeutet, daß eine vorgegebene Pitchwinkelverteilung sich verbreitert, so daß Gradienten abgebaut werden.

Wenn Pitchwinkelstreuung ausreichen stark und lange einwirkt, kann ein Teilchen dadurch seine Flugrichtung entlang des Magnetfeldes sogar umkehren. Im Gegensatz zur adiabatischen Spiegelung geht dabei die Pitchwinkelinformation verloren. Häufige nichtadiabatische Reflektion an Streuzentren bewirken eine räumliche Diffusion (ein Auseinanderlaufen) eines Teilchenschwärms.

Pitchwinkeldiffusion läßt sich in einer partiellen Differentialgleichung für die Pitchwinkelverteilung $f(z, \mu, t)$ beschreiben. Hierbei ist

- z die Ortskoordinate des Führungszentrums entlang einer Flußröhre,
- μ der Kosinus des Pitchwinkels,
- t die Zeit.

Diese Gleichung für den *fokussierten Transport* stammt von E. C. Roelof (1969) und lautet

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + v \mu \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1 - \mu^2}{2 L} v \frac{\partial f}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = q(z, \mu, t)} \quad (62)$$

Sie beschreibt die Teilchenausbreitung entlang einer Magnetfeldflußröhre, deren Achse die z -Richtung ist. Als kanonisch konjugierte Phasenraumkoordinaten dienen, wie im Abschnitt 3.4.5 gezeigt wurde, jetzt z und $p_z = \gamma mv\mu$. Falls keine Streuung stattfände und weder Quellen noch Senken vorhanden wären, bliebe die Dichte der Teilchen in diesem Phasenraum konstant. Dann würde gelten

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_z} \frac{dp_z}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

worin gilt

$$\frac{dz}{dt} = \mu v \quad \text{mit} \quad \mu = \cos \vartheta = \sqrt{1 - \frac{B}{B_s}} \quad \text{wegen 1. adiabat. Inv.}$$

Dies liefert den zweiten Term in der Transportgleichung (62). Weiterhin ist

$$\frac{dp_z}{dt} = \gamma mv \frac{d\mu}{dt} = \gamma mv \frac{\partial \mu}{\partial B} \frac{dB}{dt} = \gamma mv \frac{-1}{2\mu B_s} \frac{\partial B}{\partial z} \mu v,$$

so daß sich unter Verwendung der Spiegelfeldstärke

$$B_s = \frac{B}{1 - \mu^2}$$

und der Fokussierungslänge

$$L := \frac{-B}{\partial B / \partial z}$$

ihr dritter Term als

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{-(\partial B / \partial z) v}{2 B_s} = \frac{1 - \mu^2}{2 L} v$$

ergibt, der die systematischen Änderungen des Pitchwinkels bei adiabatischer Bewegung in einer sich aufweitenden ($L > 0$) oder verengenden ($L < 0$) Flußröhre angibt. Im homogenen Feld wäre $L = \infty$, und der Term entfiel.

Der vierte Term beschreibt die stochastischen Veränderungen. Der negative Gradient $-\partial f / \partial \mu$ der Pitchwinkelverteilung in μ -Richtung multipliziert mit einem Pitchwinkeldiffusionskoeffizienten $\kappa(z, \mu)$ liefert einen Pitchwinkeldiffusionsstrom, und der gesamte vierte Term ist die Divergenz dieses Diffusionsstroms.

In Kugelkoordinaten ist der Gradient einer Funktion F

$$\text{grad } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \end{pmatrix},$$

wobei wir bei Pitchwinkelverteilungen nur eine Abhängigkeit vom Pitchwinkel ϑ annehmen, so daß die ersten beiden Komponenten verschwinden. Die Divergenz eines Vektors a ist in Kugelkoordinaten allgemein

$$\text{div } a = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta).$$

Im einfachsten Fall isotroper Winkelstreuung hängt der Diffusionskoeffizient nicht von der Richtung ab, so daß die in Kugelkoordinaten $\kappa(\vartheta, \varphi) = \kappa_0$ geschrieben werden kann. Die Divergenz des Diffusionsstroms ist dann

$$\text{div} \left(\kappa_0 \frac{-1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = \frac{-1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\kappa_0}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = \frac{-1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\kappa_0 \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right).$$

Schreibt man $\cos \vartheta = \mu$ und entsprechend $\partial \vartheta = -\partial \mu / \sqrt{1 - \mu^2}$, so wird die Divergenz des Diffusionsstroms gleich

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\kappa_0 (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right).$$

Verwendet man also den Pitchwinkelkosinus μ statt des Pitchwinkels ϑ , dann enthält bereits bei isotroper Streuung der Pitchdiffusionskoeffizient den Faktor $(1 - \mu^2)$. Bei richtungsabhängiger Streuung ist κ_0 durch eine Funktion $\kappa_1(\mu)$ zu verallgemeinern.

Die rechte Seite ist die Quelle, also etwa eine kurze, impulsive Injektion aus einem solaren Flare-Gebiet in eine interplanetare Flußröhre.

Die Differentialgleichung (62) ist leider i. a. nicht analytisch, sondern nur numerisch oder in gewissen Näherungen zu lösen.

Wenn die Pitchwinkelstreuung die übrigen Einflusse deutlich überwiegt, dann läßt sich aus ihr näherungsweise eine einfachere partielle Differentialgleichung

für den omnidirektionalen Mittelwert

$$f_0(z, t) = \langle f(z, t) \rangle \equiv \int_{-1}^{+1} f(z, \mu, t) dt / 2$$

der Pitchwinkelverteilung herleiten. Diese Gleichung lautet

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left(A D \frac{\partial f_0}{\partial z} \right) = Q(z, t).$$

(63)

Hierin ist $A(z)$ der variable Flußröhrenquerschnitt und $D(z)$ der Koeffizient der Diffusion in z . Er hängt mit dem Pitchwinkeldiffusionskoeffizienten folgendermaßen zusammen:

$$D(z) = v L(z) \frac{\langle \mu e^{G(z, \mu)} \rangle}{\langle e^{G(z, \mu)} \rangle}$$

mit

$$G(z, \mu) = \frac{v}{2 L(z)} \int_0^\mu \frac{1 - \nu^2}{\kappa(z, \nu)} d\nu.$$

Diese partielle Differentialgleichung ist vom Wärmeleitungstyp und kann zumindest für gewisse Funktionen $D(z)$ analytisch gelöst werden. Im Rahmen dieser Näherung gilt dann für die Gesamtlösung

$$f(z, \mu, t) = f_0(z, t) - \frac{\partial f_0}{\partial z} L \left(\frac{e^G}{\langle e^G \rangle} - 1 \right).$$

4 Magnetohydrodynamik (MHD)

4.1 Elektromagnetische Felder in leitfähigen Medien

Die Induktionsgleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ändert sich durch die Leitfähigkeit des Mediums nicht. In einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Medium fließt Strom gemäß

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (64)$$

so daß

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (65)$$

und daher

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j} + \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (66)$$

gilt. Man kann als zwei Grenzfälle dieser Gleichung die *plasmaphysikalische* und die *magnetohydrodynamische* Näherung behandeln. Plasmaphysik gilt, wenn alle Frequenzen hoch im Vergleich zu der Frequenz sind, mit der Kollisionen geschehen. Elektronen und Ionen werden dann in entgegengesetzter Richtung beschleunigt, und die Ladungstrennung führt zu Plasmaschwingungen. Sie sollen hier nicht behandelt werden.

Bei ausreichend niedrigen Frequenzen hingegen ist wegen der Stöße nicht die Beschleunigung sondern die Geschwindigkeit und damit der Strom proportional zum elektrischen Feld. In dieser magnetohydrodynamischen Näherung wird in der Faradayschen Gleichung der Verschiebungsstrom $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ gegenüber den übrigen Termen vernachlässigt. Dies lässt sich folgendermaßen begründen.

Schätzt man in der vollständigen Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

die räumlichen Ableitungen durch $1/L$ und die zeitlichen durch $1/T$ ab, wobei L die charakteristische Länge für räumliche und T die charakteristische Zeit für

zeitliche Änderungen ist, so gilt betragsmäßig

$$\frac{H}{L} = j + \varepsilon_0 \frac{E}{T}$$

Unter Verwendung der Beziehung $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, die bei ausreichend hoher Leitfähigkeit gilt, wird daraus

$$\frac{H}{L} = j + \frac{vH}{c^2 T} = j + \frac{vL}{c^2 T} \frac{H}{L}.$$

Die zeitliche Ableitung des Verschiebungsstroms ist danach also dann zu vernachlässigen, wenn $vL/T \ll c^2$ ist. Die übliche Bedingung für quasistationäre Zustände ist $T \gg L/c$, d. h. die Zeit, die eine elektromagnetische Welle für die Strecke L braucht, muß viel kürzer sein als die charakteristische Zeit T der Zeitvariationen. Für $v \ll c$ ist die Vernachlässigung also gerechtfertigt.

Es gilt somit

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) + \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0 \sigma} (\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}) + \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Mit $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt daraus

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (67)$$

Hierbei ist es interessant, zwei Grenzfälle zu unterscheiden. Sie lassen sich durch den Wert der sog. magnetischen Reynold-Zahl kennzeichnen. Sie ist definiert als *magnetische Reynold-Zahl*

$$R_m := \frac{VL}{\eta} := \mu_0 \sigma V L.$$

Hierin ist L eine charakteristische Länge für räumliche Variationen und V eine charakteristische Geschwindigkeit. Ist $R_m \ll 1$, dann ist in Gleichung (67) der erste Term auf der rechten Seite dominant, und der zweite kann vernachlässigt werden. Bei $R_m \gg 1$ liegen die Verhältnisse umgekehrt.

4.2 Diffusion von Magnetfeldern

Ist das Medium in Ruhe, also $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und $R_m = 0$, dann reduziert sich Gleichung (67) auf die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B} \quad (68)$$

mit dem Diffusionskoeffizienten

$$\eta := \frac{1}{\mu_0 \sigma}$$

von der Dimension m^2/s . Ein anfänglich irgendwo im Medium konzentriertes Magnetfeld zerläuft also unter Abschwächung, und zwar um schneller, je kleiner die Leitfähigkeit σ ist.

Bei gewöhnlichen Leitern ist die Zerfallszeit, also die Zeit, in der das Feld im wesentlichen abgeklungen ist, klein. In einer Kupferkugel von 1 m Radius liegt sie unter 10 Sekunden. In Himmelskörpern hingegen kann sie sehr groß werden, im glühenden Eisenkern der Erde etwa 15 000 Jahre, in einem Sonnenfleck etwa 300 Jahre. Für das Hauptfeld der Sonne wäre die Zeit 10^{10} Jahre, vergleichbar also mit dem Alter des Universums. (Hier sind jedoch andere Effekte wirksam, denn das Feld kehrt alle 11 Jahre seine Polarität um).

4.3 Mitführung von Magnetfeldern

In einem bewegten Medium hoher Leitfähigkeit σ , also bei $R_m \gg 1$, gilt hingegen näherungsweise

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (69)$$

Für Zeiten, die kleiner sind als die obige Diffusionszeit, folgt daraus, wie wir sehen werden, eine Mitführung der Magnetfelder. Man spricht von ‘eingefrorenen’ Magnetfeldern. Es gilt der Satz von Alfvén:

In einem perfekt leitenden Körper, der sich relativ zu einem Magnetfeld bewegt, bleibt der magnetische Fluß durch jede mitbewegte Fläche konstant.

Abbildung 6: Zum Satz von Alfvén.

Betrachten wir dazu in Abb. 6 eine Fläche F im Medium, die von einer geschlossenen Kurve C begrenzt ist. Der magnetische Fluß durch diese Fläche sei

$$\Phi(t) = \iint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}.$$

Wenn sich das Medium mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, dann überstreicht ein Stück dl der Randkurve in der Zeit dt ein Flächenstück $df = |\mathbf{v} \times dl| dt$. Die gesamte Änderung des Flusses durch die Fläche ist dabei

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f} + \oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times dl,$$

bestehend also aus der rein zeitlichen Feldänderung und dem Fluß durch die bei der Verlagerung der Randkurve entstehenden Mantelfläche. Das Spatprodukt, das dies beschreibt, lässt sich durch zyklische Vertauschung der Faktoren und Anwendung des Stokesschen Satzes umformen:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times dl = \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot dl = \iint_F (\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v})) \cdot d\mathbf{f}$$

Hieraus ergibt sich für totale Flußänderung

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_F \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \cdot d\mathbf{f}.$$

Der Integrand verschwindet aber wegen der als ausreichend hoch vorausgesetzten Leitfähigkeit σ gemäß Gleichung (69). Somit bleibt dabei also der Fluß durch die mit dem Medium mitbewegte Fläche konstant, und es kann weder Magnetfeld in das Medium eindringen noch aus ihm entweichen.

4.4 Das interplanetare Magnetfeld

Das interplanetare Magnetfeld ist ein wichtiges Beispiel für die Mitführung von Magnetfeldern durch Plasma. Dieses Magnetfeld stammt von der Sonnenoberfläche. Das solare Plasma wird vom Sonnenwind mit einer mittleren Geschwindigkeit $V \approx 400 \text{ km/s} \approx 0.01 \text{ AU/h}$ radial von der Sonne nach außen getragen, während sich die Sonne mit den Fußpunkten der Magnetfeldlinien mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega \approx 2\pi/(25 \text{ Tage})$ dreht. In Kugelkoordinaten, die sich mit der Sonne mitdrehen, gilt deshalb für den Ort jedes bei der heliografischen Länge φ_0 ausgesendeten kleinen Plasmapakets unabhängig von seiner heliografischen Breite ϑ (Nordpol: $\vartheta = 0^\circ$, Südpol: $\vartheta = 180^\circ$)

$$\dot{r} = V \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = -\Omega \quad (70)$$

und daher

$$r(\varphi) = -\frac{V}{\Omega} (\varphi - \varphi_0). \quad (71)$$

Die Ortskurven sind also Archimedische (lineare) Spiralen. Das Verhältnis V/Ω ist im Mittel etwa 1 AU.

Vernachlässigen wir Fluktuationen und nehmen idealisierend an, daß das im Plasma ‘eingefrorene’ Magnetfeld die Plasmapakete, die einem bestimmten Punkt der Sonnenoberfläche entstammen, auf die kürzeste Weise verbindet, dann haben die Feldlinien die Richtung der Ortskurventangenten, die unter Verwendung von (70) und den Formeln auf Seite A-6 und A-7 durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \mathbf{x}_r + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi + r \dot{\vartheta} \mathbf{x}_\vartheta = V \mathbf{x}_r - r \Omega \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi \quad (72)$$

gegeben sind. Die Feldlinien besitzen also eine radiale und eine azimutale, aber keine zu beiden senkrechte Komponente, d. h. sie haben die Form

$$\mathbf{B} = (B_r \mathbf{x}_r + B_\varphi \mathbf{x}_\varphi) \cdot \text{sign}(\cos \vartheta)$$

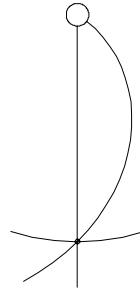


Abbildung 7: Interplanetare Magnetfeldlinien schneiden bei der Erdbahn die radiale Richtung von der Sonne im Mittel unter etwa 45° Grad. Ihr Fußpunkt auf der Sonne liegt etwa 57° westlich.

Im letzten Faktor wird berücksichtigt, daß das solare Magnetfeld natürlich kein Monopolfeld ist, sondern auf der Nord- und der Südhalbkugel entgegengesetzte Polarität hat. Für den Winkel ψ zwischen Feldrichtung und radialer Richtung gilt

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{x}_r \cdot \dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\Omega \sin \vartheta}{V}\right)^2}}$$

und entsprechend

$$\tan \psi = -\frac{r\Omega \sin \vartheta}{V}.$$

Bei der Erdbahn, also bei $r = 1$ AU ist, wie Abbildung 7 zeigt, bei einer Sonnenwindgeschwindigkeit $V = 0.01$ AU/h $\psi \approx -45^\circ$. Eine Feldlinie, die die Erde trifft, hat ihren solaren Fußpunkt bei knapp 60° West, denn es ist

$$\varphi_0 - \varphi_e = -\frac{r_e \Omega}{V} \approx 1 \simeq 57^\circ.$$

Von dem Magnetfeldvektor läßt sich zunächst die *Radialkomponente* bestimmen. Betrachten wir dazu bei einem Abstand r_0 von der Sonne ein Flächenstück der Größe $A(r_0)$ mit einer radialen Normalen und verfolgen die Randfeldlinien bis zu einem Abstand r , so umfassen sie dort eine Fläche

$$A(r) = A(r_0) \frac{r^2}{r_0^2}$$

wenn der Sonnenwind sich in diesem Bereich radial ausbreitet. Daß sich die so definierte Flußröhre dabei durch die Sonnenrotation krümmt, hat keine Auswirkung

auf dieses Flächenverhältnis. Wegen der Quellenfreiheit des Feldes, ausgedrückt durch

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

bzw. durch die äquivalente integrale Form

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{B} dv = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \iint_{A(r)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} - \iint_{A(r_0)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} &= B_r(r) A(r) - B_r(r_0) A(r_0) \\ &= \left(B_r(r) - B_r(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \right) A(r) = 0 \end{aligned}$$

und demgemäß

$$B_r(r) = B_r(r_0) \left(\frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (73)$$

Die Radialkomponente des Magnetfeldes, nicht aber der Betrag, nimmt also quadratisch mit dem solaren Abstand ab.

Die *Azimutalkomponente* des interplanetaren Magnetfeldes ist entsprechend *Azimutale Komponente* Gleichung (72)

$$B_\varphi(r) = -B_r(r) \frac{r\Omega}{V} \sin \vartheta = -B_r(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{r\Omega}{V} \sin \vartheta. \quad (74)$$

Damit gilt schließlich für die gesamte Feldstärke

$$\mathbf{B} = B_r(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \left(\mathbf{x}_r - \frac{r\Omega}{V} \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi \right) \operatorname{sign}(\cos \vartheta) \quad (75)$$

mit dem Betrag

$$B(r) = B_r(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \sqrt{1 + \left(\frac{r\Omega}{V} \sin \vartheta \right)^2}. \quad (76)$$

Man erkennt, daß \mathbf{B} bei kleinen Sonnenabständen r sowie fernab der Äquatorebene ($\sin \vartheta \ll 1$) sich näherungsweise wie

$$\mathbf{B} = B_r(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \mathbf{x}_r \operatorname{sign}(\cos \vartheta)$$

verhält, also mit $1/r^2$ abnimmt. Bei großen Abständen nahe der Äquatorebene ist näherungsweise

$$\mathbf{B} = -B_r(r_0) \frac{r_0}{r} \frac{r_0 \Omega}{V} \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi \operatorname{sign}(\cos \vartheta).$$

Dort nimmt \mathbf{B} also nur mit $1/r$ ab.

4.5 Stromschichten

Im stationären Fall und ebenso in der MHD-Näherung, wenn also Verschiebungströme $\partial \mathbf{D} / \partial t$ vernachlässigt werden können, gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

oder in Integralschreibweise

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot df = \iint \mathbf{j} \cdot df = I. \quad (77)$$

Wir wenden (siehe Abbildung 8) diese Beziehung auf ein Magnetfeld an, das auf beiden Seiten der $x-y$ -Ebene homogen ist, aber an dieser Ebene seine Tangentialkomponente ΔH_{\perp} sprunghaft ändert, während die Normalkomponente ΔH_{\parallel} gleichbleibt. Es ist also

$$\mathbf{H}_{1\perp} - \mathbf{H}_{2\perp} =: \Delta \mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{H}_{1\parallel} - \mathbf{H}_{2\parallel} =: \Delta \mathbf{H}_{\parallel}.$$

Dann muß innerhalb der Grenzschicht ein Strom I senkrecht zum Differenzvektor $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)$ fließen. Längs eines schmalen rechteckigen Integrationsweges parallel zum Differenzvektor gilt hier

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \Delta H_{\parallel} \Delta x - H_{\perp} \Delta z + \frac{1}{2} \Delta H_{\parallel} \Delta x + H_{\perp} \Delta z = \Delta H_{\parallel} \Delta x = I.$$

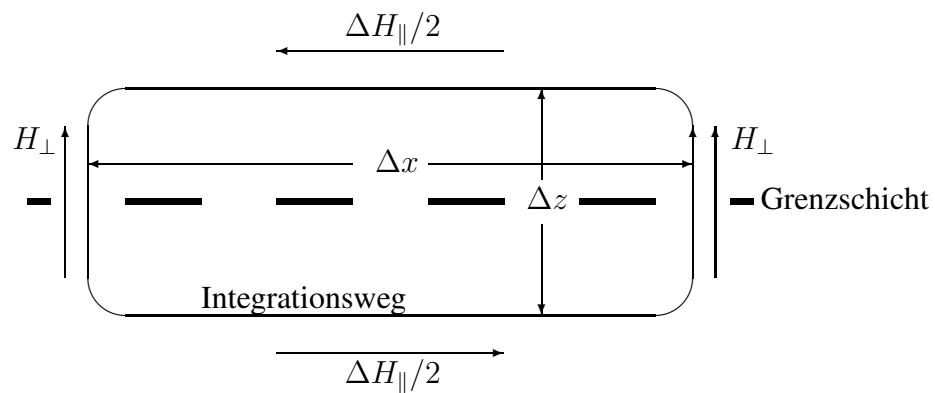


Abbildung 8: Zur Berechnung der Stromschicht an der Grenze zwischen zwei Gebieten mit unterschiedlichem Magnetfeld.

Daraus ergibt sich in der Grenzschicht ein Strom der Liniendichte

$$\tilde{j} = \frac{I}{\Delta x} = \Delta H_{\parallel}.$$

4.5.1 Die äquatoriale Stromschicht

Etwas vereinfacht betrachtet hat das interplanetare Magnetfeld oberhalb und unterhalb der Äquatorebene der Sonne entgegengesetzte Richtungen (siehe Abbildung 9). Dieser Sprung in der Feldrichtung muß durch eine Stromschicht in der Äquatorebene aufrechterhalten werden. Messungen des interplanetaren Magnetfeldes haben ergeben, daß diese Schicht nicht genau mit der Äquatorebene zusammenfällt, sondern etwas gewellt ist, ähnlich etwa dem Röckchen einer Ballerina. Die Stromlinien stehen senkrecht zum Differenzvektor, also senkrecht zu den Archimedischen Spiralen (siehe Gleichung (71)). Der Strom fließt deshalb entlang hyperbolischer Spiralen⁵.

$$r(\varphi) = -\frac{V}{\Omega} \frac{1}{\varphi - \varphi_1} \quad (\varphi_1 = \text{Scharparameter}). \quad (78)$$

Bei einer Feldstärke $B = 5 \text{ nT}$ bei 1 AU ist die Liniendichte dieses Stromes

$$\tilde{j} = \Delta H = \frac{\Delta B}{\mu_0} = \frac{10^{-1}}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{m}} \approx 8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Wie groß sind die radiale und die azimutale Komponente dieses Stromes?

Zum Sprung der azimutalen Komponente ΔB_{φ} in der Äquatorebene gehört *radiale Komponente* ein *radialer Strom* I_r . Wir betrachten wie in Abbildung 9 ein kleines rechteckiges Flächenstück $r \Delta\varphi \cdot r \Delta\vartheta$ mit radialer Normalen. Für den radialen Strom durch diese Fläche gilt unter Benutzung von (77) und von (74) *der äquatorialen Stromschicht*

$$\Delta I_r(r) = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -2 \frac{B_{\varphi}}{\mu_0} r \Delta\varphi = r \Delta\varphi \frac{2B_r(r_0)}{\mu_0} \frac{r_0^2}{r^2} \frac{r\Omega}{V}.$$

Die Liniendichte des radialen Stromanteils ist entsprechend

$$\tilde{j}(r) = \frac{\Delta I_r(r)}{r \Delta\varphi} = \frac{2B_r(r_0)}{\mu_0} \frac{r_0^2}{r^2} \frac{r\Omega}{V} \sim \frac{1}{r}. \quad (79)$$

⁵wegen der Orthogonalität beider Hyperbeltypen siehe Anhang C

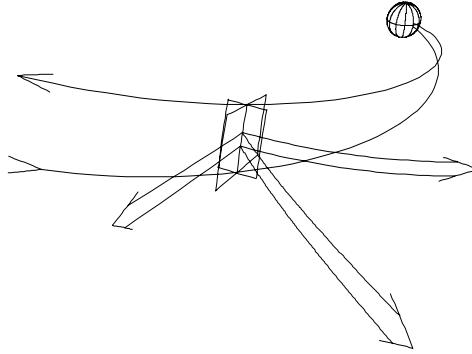


Abbildung 9: Interplanetarer Magnetfeldsprung von B_N nach B_S in der Äquatorebene der Sonne und die dazu senkrechte Stromschicht j . Sie lässt sich in eine Radialkomponente j_r und eine Azimutalkomponente j_a aufteilen.

Der gesamte radiale Strom

$$I_r = \int_0^{2\pi} \tilde{j}(r) r d\varphi = 2\pi r \tilde{j}(r) = 4\pi \frac{B_r(r_0)}{\mu_0} r_0 \frac{r_0 \Omega}{V} \quad (80)$$

ist erwartungsgemäß unabhängig vom Sonnenabstand r .

Bei der Erdbahn mit $r = r_e \approx 1.5 \cdot 10^{11}$ m ist $B \approx 5$ nT und $r\Omega/V \approx 1$. Drückt man B_r durch den Betrag B der Feldstärke aus (siehe (76) mit $\sin \vartheta = 1$ in der Äquatorebene), erhält man

$$\tilde{j}(r_e) = \frac{2}{\mu_0} \frac{B(r_e)}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_e \Omega}{V}\right)^2}} \frac{r_e \Omega}{V} \approx 5.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

und

$$I_r = \frac{4\pi r_e}{\mu_0} B(r_e) \frac{\frac{r_e \Omega}{V}}{\sqrt{1 + \frac{r_e \Omega}{V}}}.$$

Daraus ergibt sich ein radialer Gesamtstrom von etwa 5 GA.

Ist die Polarität des Magnetfeldes so, daß B_r in der nördlichen Hemisphäre positiv ist, d. h. daß die Feldvektoren nach außen weisen, dann hat die äquatoriale Stromschicht eine positive, d. h. von der Sonne weg weisende Komponente.

Der zum Sprung in der radialen Magnetfeldkomponente gehörende Strom I_φ ist *azimutal*. Es gilt bei einer Integration wie in Abbildung 9 über die Strecke Δr

längs zweier benachbarter entgegengesetzter gerichteter Feldlinien und über zwei zum Feld senkrechte Verbindungswege

$$I_\varphi = \iint \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H} \cdot ds = \frac{2}{\mu_0} \int_r^{r+\Delta r} B_r dr'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{I_\varphi(r)}{\Delta r} = 2 \frac{B_r(r_0)}{\mu_0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2.$$

Die Liniendichte dieses azimutalen Stroms nimmt also mit dem Quadrat des Sonnenabstandes ab. Bei der Erde beträgt sie ebenfalls ungefähr

$$\frac{I_\varphi(r_0)}{\Delta r} = 8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Tatsächlich sind diesem idealisierten glatten Modell des interplanetaren Magnetfeldes aufgrund der Turbulenzen auf der Sonnenoberfläche Unregelmäßigkeiten auf unterschiedlichen zeitlichen und räumlichen Skalen überlagert, die das Feld und auch die Stromschicht darin komplizierter machen.

4.5.2 Polare Ströme

Der radiale Anteil I_r des Stromes, der je nach Polarität des Sonnenmagnetfeldes in ihrer Äquatorebene ein- oder auswärts fließt, muß sich in Strömen in der nördlichen und südlichen Hemisphäre fortsetzen und so einen riesigen interplanetaren Stromkreis schließen. Hierzu ist ein Strom der Dichte

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B} / \mu_0 \quad (81)$$

erforderlich. Wir verwenden \mathbf{B} aus (75) in der Formel von Seite A-7 für die Rotation in Kugelkoordinaten und erhalten als einzige von Null verschiedene Komponente

$$j_r = -2 \frac{B_r(r_0)}{\mu_0} r_0 \frac{r_0 \Omega}{V} |\cos \vartheta| =: 2 j_0 |\cos \vartheta|. \quad (82)$$

Das Polardiagramm dieser Stromdichte besteht also wie Abbildung 10 im Schnitt zeigt, aus zwei Kugeln mit dem Radius j_0 , die die Äquatorebene von Norden bzw.

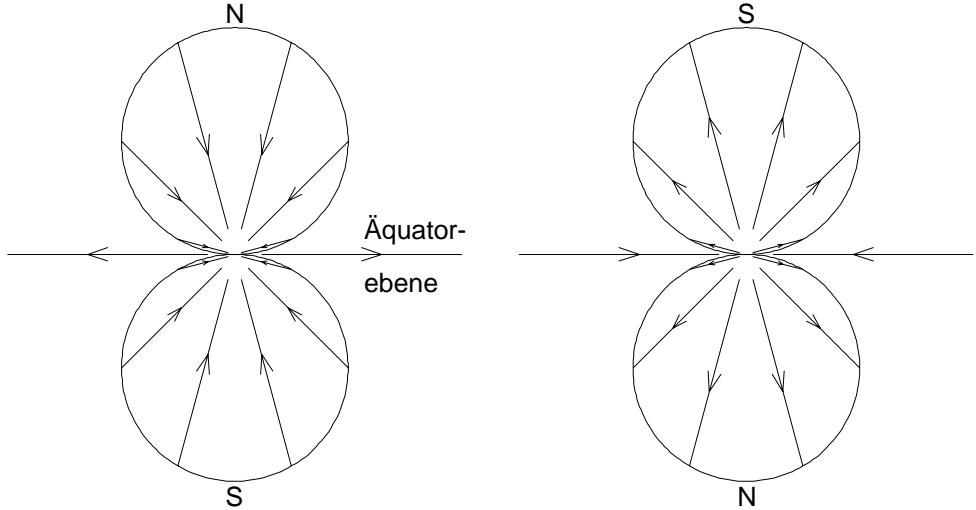


Abbildung 10: Das heliosphärischen Stromsystems, hier im Querschnitt senkrecht zur Äquatorebene gezeichnet, besteht aus der äquatorialen Stromschicht (79) und den Strömen (82, Pfeillänge proportional zur Stromdichte) in der nördlichen und in der südlichen Hemisphäre. Sie sind Bestandteile eines geschlossenen Stromkreises. Links: Stromrichtungen, wenn das solare Magnetfeld im Norden auswärts weist, rechts: wenn es dort einwärts weist.

von Süden berühren. Der gesamte durch beide Hemisphären je nach Polarität des solaren Magnetfeldes ein- oder ausfließende Strom ist danach

$$I_p = 2 \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} j_r r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = -4\pi \frac{B_r(r_0)}{\mu_0} r_0 \frac{r_0 \Omega}{V}.$$

Er gleicht also genau den radialen Strom von etwa 5 GA in der äquatorialen Stromschicht aus, wie er in Gleichung (80) gegeben ist. Interessanterweise hat dieser Strom keine azimutale Komponente wie das Magnetfeld. Er würde daher genau so sein, wenn sich die Sonne andersherum drehte.

Würde die Sonne nicht rotieren, dann wäre das Magnetfeld unter den gemachten Verhältnissen in beiden Hemisphären rein radial, und es wäre dort kein Strom nötig. Strom flösse nur in der äquatorialen Trennschicht zwischen den ein- und den auswärtsgerichteten Magnetfeldlinien, und zwar azimuthal. Er hätte keine radiale Komponente, die durch polare Ströme kompensiert werden müßte.

Beide Beiträge zum heliosphärischen Stromsystem, also die äquatoriale Strom-

schicht und die polaren Ströme, lassen sich zusammengefasst als

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\vartheta \\ j_\varphi \end{pmatrix} 2 \frac{B_r(r_0)}{\mu_0} r_0 \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{r_0 \Omega}{V} |\cos \vartheta| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\delta(\vartheta - \pi/2)}{r} \begin{pmatrix} -\frac{r_0 \Omega}{V} \\ 0 \\ \frac{r_0}{r} \end{pmatrix} \right\}. \quad (83)$$

4.5.3 Stromschichten in der Erdmagnetosphäre

Beim Übergang vom interplanetaren Medium zur Erdmagnetosphäre steigt die Magnetfeldstärke und -richtung ziemlich sprunghaft an. Hiermit ist eine Magnetopausenstromschicht verbunden. Wegen des wesentlich stärkeren Erdmagnetfeldes bestimmt dieses im wesentlichen die Richtung und Größe der Ströme. Sie fließen deshalb in der Grenzschicht in erster Näherung senkrecht zu den Feldlinien des Erdfeldes. Im Schweif der Erdmagnetosphäre (auf der Nachtseite der Erde) gibt es ebenfalls eine Trennschicht zwischen auswärts- und einwärtsweisenden Magnetfeldlinien. Der Feldstärkesprung ist etwa $\Delta B = 40$ nT. Ein Strom $j = \Delta \mathbf{H} = \Delta \mathbf{B}/\mu_0 \approx 32$ mA/m liefert hier die Kraft, die die entgegengesetzten gerichteten benachbarten Feldlinien auseinanderhält. Das magnetosphärische Stromsystem ist in Abbildung 11 dargestellt.

4.6 Helizität des interplanetaren Magnetfeldes

Die Parkersche Spiralstruktur gibt dem interplanetaren Magnetfeld einen Schraubensinn. In der nördlichen Heliosphäre entspricht er einem Linksgewinde, in der südlichen einem Rechtsgewinde, und zwar unabhängig von der Polarität des solaren Magnetfeldes, die alle elf Jahre während der Zeit maximaler Sonnenfleckenzahl wechselt. Man bezeichnet dies als *Helizität H*. Die Dichte h der Helizität des Vektorpotentials \mathbf{A} lässt sich quantitativ als

$$h := \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (84)$$

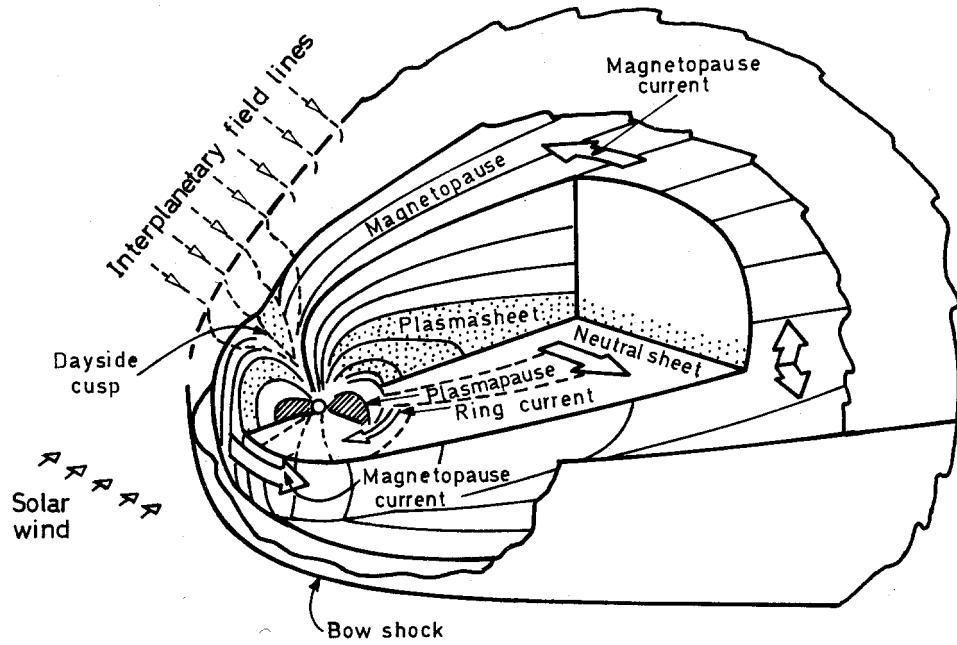


Abbildung 11: Das magnetosphärische Stromsystem (aus [?]).

definieren. Es sei erwähnt, daß man statt der Helizität des Vektorpotentials \mathbf{A} alternativ auch die Helizität

$$h := \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{j} / \mu_0$$

des Feldes \mathbf{B} betrachten kann. Beide Definitionen gewährleisten Unabhängigkeit von der Feldpolarität, denn mit \mathbf{B} wechseln auch $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ und damit \mathbf{A} sowie \mathbf{j} die Vorzeichen. Zu beachten ist, daß \mathbf{A} von seiner Eichung abhängt, was sich auf h fortpflanzt. Die Helizitätsdichte ist eine pseudoskalare Feldfunktion, denn bei Raumspiegelung ändert sie ihr Vorzeichen.

Mit den Abkürzungen

$$a := B_r(r_0) r_0^2, \quad b = B_r(r_0) r_0 \frac{r_0 \Omega}{V}$$

und mit der Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ist das Vektorpotential \mathbf{A} zu diesem

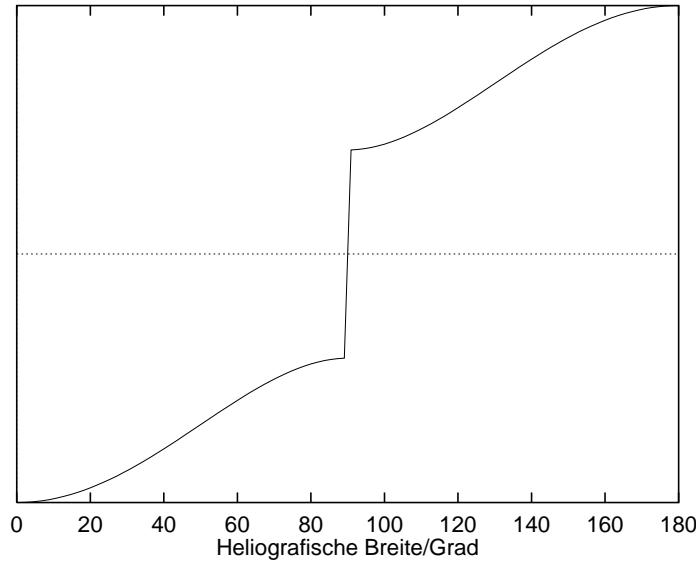


Abbildung 12: Helizitätsdichte h des interplanetaren Magnetfeldes als Funktion der Breite.

spiralförmigen Magnetfeld in Kugelkoordinaten (nach Bieber et al. [?])

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{2}{3} b \left(1 - \frac{3}{2} |\cos \vartheta| - |\cos \vartheta| \ln (1 + |\cos \vartheta|) \right), \\ A_\vartheta &= \frac{2}{3} b \sin \vartheta \left(\frac{|\cos \vartheta|}{1 + |\cos \vartheta|} + \ln (1 + |\cos \vartheta|) \right) \text{sign}(\cos \vartheta), \\ A_\varphi &= a \frac{1 - |\cos \vartheta|}{r \sin \vartheta}. \end{aligned} \quad (85)$$

Man bestätigt dies durch Berechnung von $\operatorname{div} \mathbf{A}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ in Kugelkoordinaten (siehe Anhang B). Gegenüber dem im Abschnitt 2.4.2 auf Seite 12 angegebenen Vektorpotential für ein radiales Magnetfeld kommen hier also eine r - und eine ϑ -Komponente hinzu.

Die Helizitätsdichte h ergibt sich aus dem Magnetfeld (75) und seinem Vektorpotential (85) als

$$h = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -\frac{ab \operatorname{sign}(\cos \vartheta)}{3r^2} (1 + 2 |\cos \vartheta| \ln(1 + |\cos \vartheta|)). \quad (86)$$

Ihr Verlauf als Funktion der Breite ist in Abbildung 12 dargestellt. Über den Polen, also bei $\cos \vartheta = \pm 1$, hat die Helizitätsdichte die Werte

$$h = \mp \frac{ab}{3r^2} (1 + 2 \ln 2) \approx \mp 0.8 \frac{ab}{r^2}.$$

Nahe der Äquatorebene bei $\cos \vartheta = \pm 0$ wechselt sie sprungartig zwischen den Werten

$$h = \mp \frac{ab}{3r^2}$$

ihr Vorzeichen. Negative Werte entsprechen dem Drehsinn eines Linksgewindes, positive dem eines Rechtsgewindes.

Die Helizität des Parker-Feldes, gemittelt über eine nördliche Halbkugel mit dem Radius R , ergibt sich als

$$H = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} h r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr / \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \right) = -\frac{5}{2} \frac{ab}{R^2}.$$

Dieser Mittelwert strebt mit wachsendem R gegen Null. Für die südliche Hemisphäre ergibt sich das gleiche, jedoch mit positivem Vorzeichen.

4.7 Elektrodynamik bewegter Medien

Grundlage sind erstens die Maxwell-Gleichungen in der Form

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (87)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (88)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (89)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (90)$$

In Gleichung (90) ist im Sinne der MHD-Näherung (siehe Abschnitt 4.1 auf Seite 50) die zeitliche Ableitung des Verschiebungsstrom \mathbf{D} vernachlässigt.

Transformiert man die Gleichungen in ein Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist, dann gilt dort näherungsweise (siehe Abschnitt 2.8 auf Seite 18)

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (91)$$

$$\rho' = \rho - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}}{c^2} \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v} \quad (92)$$

Zweitens benötigen wir eine Beziehung zwischen Stromstärke \mathbf{j} und elektrischem Feld \mathbf{E} , im einfachsten Fall also das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (93)$$

Im bewegten Bezugssystem ist

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}' = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (94)$$

In der Magnetohydrodynamik betrachten wir Plasmen sehr hoher Leitfähigkeit σ , in denen jedoch nur endlich starke Ströme fließen. Deshalb muß das elektrische Feld \mathbf{E}' im mitbewegten Bezugssystem sehr klein sein. Setzt man also $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$, dann gilt

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (95)$$

4.8 Magnetischer Druck und Zug

In einem perfekt leitenden Plasma verursachen Inhomogenitäten im Magnetfeld druck- und zugartige Kräfte. Man sieht dies folgendermaßen.

Im statischen Fall sowie in der magnetohydrodynamischen Näherung ist

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Für die Kraftdichte in diesem Feld gilt daher

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}.$$

Für jeden Vektor \mathbf{B} gilt (dies folgt aus der Formel für $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ mit $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, siehe Anhang A auf Seite A-1)

$$\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{B}^2 - (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}.$$

Damit wird die Kraftdichte zu

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\underbrace{\text{grad}}_{\text{Druck}} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}}_{\text{Zug}}. \quad (96)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der negative Gradient eines Druckes, den wir als magnetischen Druck bezeichnen können. Der zweite Term entspricht einem Zug.

Wir betrachten hierzu ein in z -Richtung liegendes Feld, das in x -Richtung wellenförmig verbogen sei:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \sin z \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für den Druckgradienten

$$-\operatorname{grad} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_1^2 \sin 2z \end{pmatrix}.$$

und für die Zugkraft

$$(\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} = B_0 B_1 \begin{pmatrix} \cos z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier nach wirken die Druckkräfte in z -Richtung, also in Richtung des Grundfeldes, und die Zugkräfte in x -Richtung, also senkrecht zum Grundfeld in derjenigen Richtung, in der es wellenförmig ausgelenkt ist.

4.9 Magnetohydrodynamische Wellen

4.9.1 Zum Vergleich: Schallwellen

Vorbereitend untersuchen wir zunächst die Ausbreitung von Schallwellen in einem kompressiblen Medium wie etwa der Erdatmosphäre. Wir müssen dazu drei Gleichungen heranziehen: die Kontinuitätsgleichung, die Kraftdichtheitgleichung und den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte. Diese drei Gleichungen für die Materiedichte ϱ , den Druck p und die Geschwindigkeit \mathbf{v} sind

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (97)$$

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \varrho (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p, \quad (98)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s =: s^2. \quad (99)$$

Die hier eingeführte Größe s hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Bei der partiellen Ableitung auf der linken Seite von Gleichung (99) ist davon auszugehen, daß die Druckänderungen so schnell sind, daß sie adiabatisch oder — gleichbedeutend — bei konstanter Entropie S stattfinden.

Von der Dichte und der Geschwindigkeit spalten wir einen orts- und zeitunabhängigen Anteil so ab, daß der Mittelwert des variablen Anteils Null ist:

$$\begin{aligned}\varrho(\mathbf{x}, t) &= \varrho_0 + \varrho_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Die variablen Anteile ϱ_1 und \mathbf{v}_1 betrachten wir als *kleine Störungen* des Ruhezustands. In einem Bezugssystem, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt, bleibt nur noch der kleine Störungsanteil \mathbf{v}_1 der Geschwindigkeit übrig. Wir können dann den Term $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$ als quadratisch in der Störung gegenüber dem linearen Term in \mathbf{v} vernachlässigen. Für den Druck gilt

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \text{ grad } \varrho = s^2 \text{ grad } \varrho.$$

Somit gilt näherungsweise das System

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \varrho_0 \text{ div } \mathbf{v}_1 = 0, \quad (100)$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + s^2 \text{ grad } \varrho_1 = \mathbf{0}. \quad (101)$$

Hieraus läßt sich \mathbf{v}_1 eliminieren, indem man die erste Gleichung partiell nach t ableitet und von der zweiten die Divergenz bildet. Dies ergibt eine Wellengleichung für ϱ_1 :

$$\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial t^2} + s^2 \Delta \varrho_1 = 0 \quad (102)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit s und beliebiger Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} . Für harmonische Komponenten ebener Wellen, deren Orts- und Zeitabhängigkeit durch

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{und somit} \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad \text{und} \quad \text{grad} = i\mathbf{k}$$

gegeben ist, folgt für die Geschwindigkeit aus der Kraftdichtegleichung

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-s^2}{\varrho_0 \omega} \varrho_1 \mathbf{k}.$$

Dies zeigt, daß der zeitabhängige Teil der Geschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung liegt. Schallwellen sind also Longitudinalwellen.

4.9.2 Magnetosonische und Alfvén-Wellen

Wir betrachten jetzt in einem Magnetfeld \mathbf{B} ein neutrales Plasma mit der Dichte ϱ , dem Druck p und mit perfekter Leitfähigkeit. Die Geschwindigkeit eines infinitesimalen Plasmavolumens sei \mathbf{v} . Für die Kraftdichte gilt unter Verwendung von $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}\mu_0$ (mit $\partial\mathbf{D}/\partial t = \mathbf{0}$ in der magnetohydrodynamischen Näherung)

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \varrho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} p - \mathbf{B} \times \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (103)$$

Die Faradaysche Induktionsgleichung ist, weil bei perfekter Leitfähigkeit $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ gilt,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (104)$$

Für Magnetfeld, Dichte und Geschwindigkeit nehmen wir wieder jeweils eine konstante Grundgröße an, der sich Wellen als dazu kleine Störungen überlagern:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \\ \varrho(\mathbf{x}, t) &= \varrho_0 + \varrho_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Es gelte der gleiche Zusammenhang (99) zwischen Druck und Dichte wie bei Schallwellen, so daß

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \text{ grad } \varrho = s^2 \text{ grad } \varrho_1$$

gilt. Das Gleichungssystem wird in einem Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 (in der Heliosphäre also mit dem Sonnenwind) bewegt, damit näherungsweise zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \varrho_0 \text{ div } \mathbf{v}_1 &= 0 && \text{(Kontinuität)}, \\ \varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + s^2 \text{ grad } \varrho_1 + \mathbf{B}_0 \times \frac{\text{rot } \mathbf{B}_1}{\mu_0} &= \mathbf{0} && \text{(Kraftdichte)}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \text{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) &= \mathbf{0} && \text{(Induktion)}. \end{aligned} \quad (105)$$

Aus diesem System sieben gekoppelter partieller Differentialgleichungen für die sieben Funktionen ϱ_1 , \mathbf{v}_1 und \mathbf{B}_1 kann man eine partielle vektorielle Differentialgleichung, die nur \mathbf{v}_1 enthält, gewinnen, indem man die zweite Gleichung partiell nach t differenziert und $\partial\varrho_1/\partial t$ aus der ersten und $\partial\mathbf{B}_1/\partial t$ aus der dritten Gleichung einsetzt. Dies ergibt die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A)) = \mathbf{0}, \quad (106)}$$

in der abkürzend die Alfvén-Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_A := \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \varrho_0}} \quad (107)$$

verwendet ist. Im interplanetaren Raum bei der Erdbahn ist $B_0 \approx 10 \text{ nT}$ und $\varrho_0 \approx 8 \cdot 10^{-21} \text{ kg/m}^3$ entsprechend 5 Protonen/cm^3 . Daraus ergibt sich eine Alfvén-Geschwindigkeit $v_A \approx 100 \text{ km/s}$, was nur etwa ein Viertel der Sonnenwindgeschwindigkeit ist. Die Dichte nimmt mit dem Quadrat des Abstandes von der Sonne ab. Die Feldstärke nimmt im inneren Teil der Heliosphäre ebenfalls quadratisch mit dem Abstand ab, weiter außen jedoch nur noch linear. Dementsprechend ist die Alfvén-Geschwindigkeit im inneren Sonnensystem umgekehrt proportional zum Abstand und wird nach außen hin konstant.

Gibt es ebene Wellen als Lösung der Gleichung (106)? Untersucht man dazu eine harmonische Komponente einer solcher Welle in der Form

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{10} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

mit entsprechend

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2, \quad \operatorname{grad} = i\mathbf{k}, \quad \operatorname{div} = i\mathbf{k} \cdot, \quad \operatorname{rot} = i\mathbf{k} \times,$$

dann wird aus der Differentialgleichung (106) die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{v}_1 + s^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{k} - \mathbf{v}_A \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_A))) &= \\ -\omega^2 \mathbf{v}_1 + (s^2 + v_A^2) \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{k} & \\ + \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_A) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (108)$$

Hier können wir jetzt die folgenden speziellen Ausbreitungsrichtungen untersuchen:

1. Ausbreitung quer zum Magnetfeld: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A = 0$.

Die Gleichung für \mathbf{v}_1 reduziert sich auf

$$-\omega^2 \mathbf{v}_1 + (s^2 + \mathbf{v}_A^2) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

*Magneto-
sonische
Wellen*

Die Plasmabewegung \mathbf{v}_1 ist also parallel zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} und damit senkrecht zum Magnetfeld und schwingt, wie man durch skalare Multiplikation mit \mathbf{k} erkennt, mit der Frequenz

$$\omega^2 = (s^2 + \mathbf{v}_A^2) \mathbf{k}^2.$$

Die Phasengeschwindigkeit ist daher gleich $1/\sqrt{s^2 + \mathbf{v}_A^2}$. Mit einem derartigen \mathbf{v}_1 liefert die Kontinuitätsgleichung (105) für die Dichteschwingungen

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{\omega} = \varrho_0 \frac{v_1}{\sqrt{s^2 + \mathbf{v}_A^2}}.$$

Aus der Induktionsgleichung (105) ergibt für die Schwingungen des Magnetfeldes

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{\omega} \mathbf{B}_0 = \frac{v_1}{\sqrt{s^2 + \mathbf{v}_A^2}} \mathbf{B}_0.$$

Es handelt sich ähnlich wie bei gewöhnlichen Schallwellen um Longitudinalwellen senkrecht zur Magnetfeldrichtung, jedoch mit durch v_A erhöhter Ausbreitungsgeschwindigkeit. Sie werden als *magnetosonische* Wellen bezeichnet. Das Feld ändert seine Richtung dabei nicht, sondern wird nur komprimiert und dekomprimiert.

2. Ausbreitung in Richtung des Magnetfeldes: $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}_A$.

Bei dieser Ausbreitungsrichtung wird aus der Gleichung für \mathbf{v}_1

$$(\mathbf{k}^2 \mathbf{v}_A^2 - \omega^2) \mathbf{v}_1 + \mathbf{k}^2 \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1 \left(\frac{s^2}{\mathbf{v}_A^2} - 1 \right) \mathbf{v}_A = \mathbf{0}.$$

Dieser Fall ist weiter zu untergliedern:

(a) Longitudinalwellen: $v_1 \parallel v_A, k$.

Es ergibt sich

$$\omega^2 = k^2 s^2.$$

*Schallwellen
entlang dem
Magnetfeld*

Für die Dichte gilt hier wegen der Kontinuitätsgleichung (105)

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{\omega} = \varrho_0 \frac{v_1}{s}.$$

Das Magnetfeld besteht nur aus dem konstanten Term \mathbf{B}_0 , denn in der Induktionsgleichung (105) ist $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$, da \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_A und somit auch \mathbf{B}_0 als parallel vorausgesetzt worden sind. Hier breiten sich also Schallwellen mit der normalen Schallgeschwindigkeit s in Magnetfeldrichtung aus.

(b) Transversalwellen: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_A = 0$.

Alfvén-Wellen

Für die Frequenz gilt hier

$$\omega^2 = k^2 v_A^2.$$

Die Dichteschwankungen sind hierbei Null, denn

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1}{\omega} \sim \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Für die Magnetfeldschwankungen ergibt sich aus der Induktionsgleichung (105) und der Definition (107) der Alfvén-Geschwindigkeit

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0}{\omega} \mathbf{v}_1 = -\sqrt{\mu_0 \varrho_0} \mathbf{v}_1.$$

Diese Wellen ähneln Seilwellen, die sich entlang dem Magnetfeld mit der Phasengeschwindigkeit v_A ausbreiten. Nach ihrem Entdecker werden sie *Alfvén-Wellen* genannt.

Aus diesen einfach zu behandelnden Spezialfällen lassen sich wegen der Linearität der Näherungsgleichungen beliebige Überlagerungen bilden.

A Formeln

Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes lassen sich unabhängig vom Koordinatensystem definieren als

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\iint_F \vec{a} \cdot d\mathbf{f}}{V}$$

Hierin ist V ein Volumen, das sich auf den Punkt P zusammenzieht, und F seine Oberfläche.

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_n = \lim_{F \rightarrow P} \frac{\oint_S \mathbf{a} \cdot ds}{F}$$

Hierin ist F ein kleines ebenes Flächenstück, das sich auf den Punkt P zusammenzieht, und S seine Randkurve. Der so definierte Vektor hat die Richtung der Flächennormalen.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a} \\ \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\operatorname{rot} \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \\ \operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{b}) \\ \operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} (\operatorname{div} \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\operatorname{div} \mathbf{a}) \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &=: \Delta \varphi \\ \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) &= \mathbf{0} \quad (\text{Wirbelfreiheit eines Gradientenfeldes}) \\ \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) &= 0 \quad (\text{Quellenfreiheit eines Wirbelfeldes}) \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}\end{aligned}$$

Der Laplace-Operator Δ ist unterschiedlich definiert, je nachdem, ob er auf einen Skalar ψ oder einen Vektor \mathbf{a} angewendet wird:

$$\begin{aligned}\Delta \psi &:= \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi \\ \Delta \mathbf{a} &:= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{a})\end{aligned}$$

Satz von Gauß: $\iiint \operatorname{div} \mathbf{a} dv = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}$

Satz von Stokes: $\iint \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{a} \cdot dr$

A.1 Kartesische Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Nabla-Operator: $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient eines Skalar: $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergenz eines Vektors: $\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

Rotation eines Vektors: $\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

Laplace-Operator, angewandt auf einen Skalar φ :

$$\Delta \varphi := \text{div} (\text{grad } \varphi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = (\nabla \cdot \nabla) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Laplace-Operator, angewandt auf ein Vektorfeld \mathbf{a} :

$$\Delta \mathbf{a} := \text{grad} (\text{div } \mathbf{a}) - \text{rot} (\text{rot } \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

Achtung: Nur in kartesischen Koordinaten ist

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{pmatrix}.$$

A.2 Krummlinige orthogonale Koordinaten $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

Abkürzungen:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} \end{aligned}$$

Für das Linienelement ds gilt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2 + h_3^2 dw^2.$$

Die Flächenelemente lauten

$$dx dy = h_1 h_2 du dv, \quad dy dz = h_2 h_3 dv dw, \quad dz dx = h_3 h_1 dz dx.$$

Für das Volumenelement gilt

$$d\tau = dx dy dz = h_1 h_2 h_3 dx dy dz.$$

Für die räumlichen Ableitungen erhält man — bei Vektoren in u -, v - und w -Komponenten

$$\text{grad } \psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 \mathbf{a}_u) \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 \mathbf{a}_v) \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 \mathbf{a}_w) \right) \\ \text{rot } \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial v} (h_3 \mathbf{a}_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 \mathbf{a}_v) \right) \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial}{\partial w} (h_1 \mathbf{a}_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 \mathbf{a}_w) \right) \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_2 \mathbf{a}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 \mathbf{a}_u) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right)$$

A.3 Zylinderkoordinaten r, φ, z

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Orthogonale Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \text{in } r\text{-Richtung: } \boldsymbol{x}_r &:= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{in } \varphi\text{-Richtung: } \boldsymbol{x}_\varphi &:= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{in } z\text{-Richtung: } \boldsymbol{x}_z &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{x}_\varphi = \boldsymbol{x}_z, \quad \boldsymbol{x}_\varphi \times \boldsymbol{x}_z = \boldsymbol{x}_r, \quad \boldsymbol{x}_z \times \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}_\varphi$$

Zeitliche Ableitungen der Einheitsvektoren:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r = \dot{\varphi} \boldsymbol{x}_\varphi,$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\varphi = -\dot{\varphi} \boldsymbol{x}_r,$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_z = \boldsymbol{0}.$$

Ortsvektor:

$$\boldsymbol{x} = r \boldsymbol{x}_r + z \boldsymbol{x}_z$$

Geschwindigkeitsvektor:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r} \boldsymbol{x}_r + r \dot{\varphi} \boldsymbol{x}_\varphi + \dot{z} \boldsymbol{x}_z$$

Beschleunigungsvektor:

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \boldsymbol{x}_r + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \boldsymbol{x}_\varphi + \ddot{z} \boldsymbol{x}_z$$

$$\text{grad } \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \\ \Delta a_z \end{pmatrix}$$

A.4 Kugelkoordinaten r, θ, φ

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad , h_3 = r \sin \theta$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Orthogonale Einheitsvektoren

$$\text{in } r\text{-Richtung: } \mathbf{x}_r := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{in } \varphi\text{-Richtung: } \boldsymbol{x}_\varphi &:= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{in } \vartheta\text{-Richtung: } \boldsymbol{x}_\vartheta &:= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_\varphi \times \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}_\vartheta, \quad \boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{x}_\vartheta = \boldsymbol{x}_\varphi, \quad \boldsymbol{x}_\vartheta \times \boldsymbol{x}_\varphi = \boldsymbol{x}_r$$

Zeitliche Ableitungen der Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_r &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \boldsymbol{x}_\varphi + \dot{\vartheta} \boldsymbol{x}_\vartheta, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \cos \vartheta \boldsymbol{x}_\vartheta - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \boldsymbol{x}_r, \\ \dot{\boldsymbol{x}}_\vartheta &= -\dot{\vartheta} \boldsymbol{x}_r + \dot{\varphi} \cos \vartheta \boldsymbol{x}_\varphi \end{aligned}$$

Ortsvektor: $\boldsymbol{x} = r \boldsymbol{x}_r$

Geschwindigkeitsvektor: $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r} \boldsymbol{x}_r + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \boldsymbol{x}_\varphi + r \dot{\vartheta} \boldsymbol{x}_\vartheta$

Beschleunigungsvektor:

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{x}} &= \left(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta - r \dot{\vartheta}^2 \right) \boldsymbol{x}_r \\ &\quad + \left(2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta + r \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 r \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) \boldsymbol{x}_\varphi \\ &\quad + \left(-r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} + r \ddot{\vartheta} \right) \boldsymbol{x}_\vartheta \end{aligned}$$

Gradient in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{grad} \psi = \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} \psi)_r \\ (\operatorname{grad} \psi)_\vartheta \\ (\operatorname{grad} \psi)_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Divergenz eines Vektors \boldsymbol{a} in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta a_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation eines Vektors \mathbf{a} in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_r \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\vartheta \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial (\sin \vartheta \mathbf{a}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathbf{a}_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} - \sin \vartheta \frac{\partial (r \mathbf{a}_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \mathbf{a}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \vartheta} \right) \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Skalar ψ :

$$\Delta_s \psi = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right).$$

Für den ersten Term rechts gilt auch $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \psi)}{\partial r^2}$.

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf ein Vektorfeld \mathbf{a} [?, ?]:

$$\Delta \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{a}).$$

Man erhält

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_r - \frac{2 a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \sin \vartheta a_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta a_\vartheta - \frac{a_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

B Rechnungen zum Vektorpotential \mathbf{A} des Parker-Feldes

B.1 Berechnung von $\operatorname{div} \mathbf{A}$ im Parker-Feld

Es ist zu zeigen, daß für das in den Gleichung (85) auf Seite 64 angegebene Vektorpotential die Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) = 0 \quad (\text{B1-1})$$

gilt. Wir verwenden dir Abkürzung

$$x := |\cos \vartheta| = \cos \vartheta \operatorname{sign}(\cos \vartheta),$$

so daß

$$x' \equiv \frac{\partial |\cos \vartheta|}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \operatorname{sign}(\cos \vartheta)$$

und

$$x'^2 = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

gilt.

Die drei Ableitungen in der Divergenz sind dann

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) = \frac{2}{3} b r (2 - 3x - 2x \ln(1 + x)), \quad (\text{B1-2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{2}{3} b \sin^2 \vartheta \left(\frac{x}{1+x} + \ln(1+x) \right) \operatorname{sign}(\cos \vartheta) \right) \\ &= \frac{2}{3} b \left(2 \sin \vartheta x \left(\frac{x}{1+x} + \ln(1+x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \vartheta x' \left(\frac{x'}{(1+x)^2} + \frac{x'}{1+x} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} b \sin \vartheta (3x - 2 + 2x \ln(1 + x)), \end{aligned} \quad (\text{B1-3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) = 0. \quad (\text{B1-4})$$

Damit erhält das gewünschte Ergebnis

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{2}{3} \frac{b}{r} (2 - 3x - 2x \ln(1 + x) + 3x - 2 + 2x \ln(1 + x)) = 0. \quad (\text{B1-5})$$

B.2 Berechnung von $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ im Parker-Feld

Gezeigt werden soll, daß sich aus dem in Gleichung (85) angegebenen Vektorpotential \mathbf{A} das Parkersche Spiralfeld \mathbf{B} durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{B2-1})$$

ergibt.

Wir berechnen dazu in Kugelkoordinaten die Komponenten von $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ gemäß der Formel von Seite A-7:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\vartheta) \right) \\ &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(a \frac{1 - |\cos \vartheta|}{r} \right) \\ &= \frac{a}{r^2} \operatorname{sign}(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (\text{B2-2})$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r) - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) = 0, \quad (\text{B2-3})$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_r) \right) \\ &= \frac{2 b}{3 r} \left(-x' \left(\frac{x}{1+x} + \ln(1+x) \right) + \frac{3}{2} x' + x' \ln(1+x) + x \frac{x'}{1+x} \right) \\ &= -\frac{b}{r} \sin \vartheta \operatorname{sign}(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (\text{B2-4})$$

Der Vergleich mit dem \mathbf{B} -Feld aus Gleichung (75) mit den Gleichungen (B2-2) und (B2-4) ergibt für die Konstanten a und b

$$a = B_r(r_0) r_0^2 \quad \text{und} \quad b = B_r(r_0) r_0^2 \frac{\Omega}{V} = a \frac{\Omega}{V}.$$

C Orthogonalität von Archimedischen und hyperbolischen Spiralen

Behauptung:

Archimedische Spiralen

$$r_a(\varphi) = a(\varphi - \varphi_a) \quad (\text{C0-5})$$

und hyperbolische Spiralen

$$r_h(\varphi) = a \frac{1}{(\varphi - \varphi_h)} \quad (\text{C0-6})$$

mit demselben Maßstabsfaktor a , aber mit beliebigen Phasenverschiebungen φ_a und φ_h kreuzen sich immer im rechten Winkel.

Beweis:

In kartesischen Koordinaten sind die Ortsvektoren, geschrieben als Funktionen des Azimutwinkels φ ,

$$\boldsymbol{x}_a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = a(\varphi - \varphi_a) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{x}_h = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} = a \frac{1}{\varphi - \varphi_a} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Ihre Differentiale sind entsprechend

$$d\boldsymbol{x}_a = a d\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi - (\varphi - \varphi_a) \sin \varphi \\ \sin \varphi + (\varphi - \varphi_a) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und

$$d\boldsymbol{x}_h = a \frac{d\varphi}{(\varphi - \varphi_h)^2} \begin{pmatrix} -\cos \varphi - (\varphi - \varphi_h) \sin \varphi \\ -\sin \varphi + (\varphi - \varphi_h) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Hinreichend für rechtwinkliges Kreuzen der Spiralen ist, daß das innere Produkt $d\boldsymbol{x}_a \cdot d\boldsymbol{x}_h$ gleich Null ist. Man erhält

$$d\boldsymbol{x}_a \cdot d\boldsymbol{x}_h = - \left(\frac{a d\varphi}{\varphi - \varphi_h} \right)^2 (1 - (\varphi - \varphi_a)(\varphi - \varphi_h)).$$

Drückt man hierin die Winkel gemäß den Spiralengleichungen durch die Abstände vom Ursprung aus, dann erhält man als gewünschtes Ergebnis

$$dx_a \cdot dx_h = (r_h d\varphi)^2 (1 - 1) = 0.$$

Archimedische und hyperbolische Spiralen mit verschiedenen Faktoren a schneiden sich nicht unter rechten Winkeln. Abbildung 13 zeigt links Spiralen mit gleichen und rechts mit ungleichen Faktoren a .

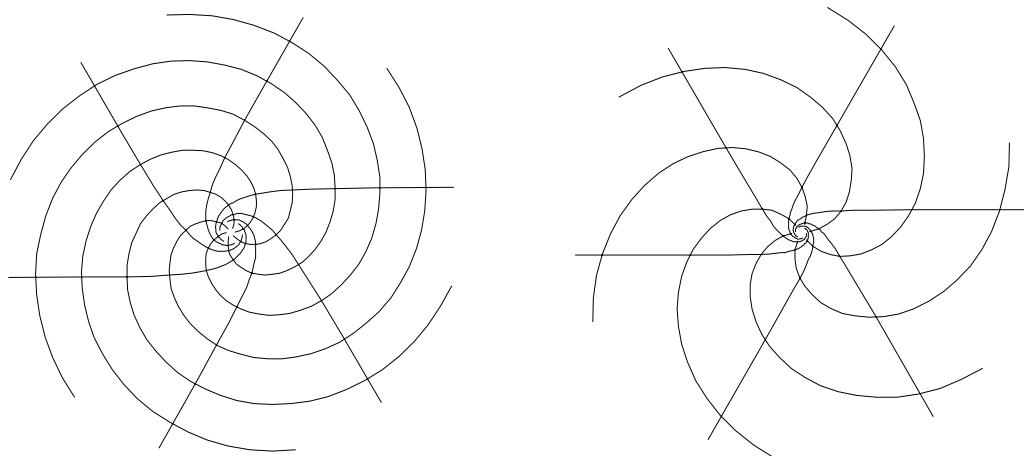


Abbildung 13: Links: Archimedische und hyperbolische Spiralen schneiden sich im rechten Winkel, wenn beide den gleichen Maßstabsfaktor haben. Rechts: Hier unterscheiden sich die Maßstabsfaktoren um den Faktor 4.

D Beispiele für Bewegungsgleichungen ohne strenge analytische Lösungen

Bereits bei einigen relativ einfachen Fällen mit zeitlich oder räumlich variablen Magnetfeldern lassen sich keine einfachen analytischen Lösungen der Bewegungsgleichung für geladene Teilchen in Magnetfeldern finden. Solche Felder sind u. a.

- ein homogenes Magnetfeld, dessen Stärke sich ändert,
- ein homogenes Magnetfeld, dessen Richtung sich ändert,
- ein Magnetfeld mit einem Gradienten senkrecht zur Feldrichtung,
- eine Magnetfeld, dessen Stärke sich entlang der Feldrichtung stetig ändert, außer wenn es ein radiales Feld ist.

D.1 Homogenes zeitabhängiges Magnetfeld

Eine Zeitabhängigkeit erzeugt ein elektrisches Feld gemäß

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \equiv -\dot{\mathbf{B}}.$$

Bei *homogenem* Magnetfeld lässt sich daraus \mathbf{E} ausdrücken als

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{B}},$$

denn (vgl. auch Abschnitt 2.4.1)

$$\text{rot} \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{B}} \right) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(\dot{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \mathbf{r}}_{\dot{\mathbf{B}}} - \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{B}}}_{0} + \mathbf{r} \underbrace{\text{div} \dot{\mathbf{B}}}_{0} - \dot{\mathbf{B}} \underbrace{\text{div} \mathbf{r}}_{3} \right) = -\dot{\mathbf{B}}.$$

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{B}} \right). \quad (\text{D1-1})$$

Unter welchen Bedingungen bleibt hierbei der Betrag des Impulses und damit die Teilchenenergie $E_{\text{total}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ konstant? Multiplizieren wir (D1-1) skalar mit $2\mathbf{p}$, so erhalten wir wegen $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \gamma m \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$

$$2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^2) = \gamma m e \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{B}}). \quad (\text{D1-2})$$

Die Energie bleibt also genau dann erhalten, wenn der Ortsvektor \mathbf{r} des Teilchens, seine Geschwindigkeit \mathbf{v} und der Vektor $\dot{\mathbf{B}}$ der Magnetfeldänderung in derselben Ebene liegen, d. h. wenn $\dot{\mathbf{B}}$ senkrecht zu \mathbf{B} ist, so daß das Feld bei konstantem Betrag nur seine Richtung ändert.

D.2 Homogenes Magnetfeld konstanter Richtung, das seine Stärke ändert

In diesem Fall sind Energieänderungen zu erwarten. Falls die Teilchenbahn näherungsweise eine Kreisbahn ist, was zu erwarten ist, wenn sich das Feld pro Gyrationperiode nur sehr wenig ändert, stehen $e\mathbf{v}$, \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{B}}$ senkrecht aufeinander. Mit zunehmender Feldstärke steigt die Teilchenenergie, denn aus (D1-2) folgt mit

$$|\mathbf{r}| = \frac{|\mathbf{p}|}{q|\mathbf{B}|}$$

die Beziehung

$$\frac{\frac{d(\mathbf{p}^2)}{dt}}{\mathbf{p}^2} = \frac{|\dot{\mathbf{B}}|}{|\mathbf{B}|}. \quad (\text{D2-1})$$

Die relative Energieänderung ist also gleich der relativen Feldstärkeänderung. Die Differentialgleichung (D2-1) läßt sich integrieren und ergibt für den Impulsbetrag

$$p = p_0 \sqrt{\frac{B}{B_0}}.$$

Das Verhältnis der beiden Kräfte auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (D1-1) der Bahngeschwindigkeit $v = r\omega$ und einer relativen Feldänderung $\dot{B}/B = \Omega$ läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\frac{|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{B}}|/2}{|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|} = \frac{r\dot{B} \sin(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{B}})/2}{vB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B})} \approx \frac{r\dot{B}}{2vB} = \frac{\Omega}{2\omega}.$$

Wenn also die Magnetfeldänderung während einer Gyration sehr klein ist, dann ist auch dieses Kräfleverhältnis sehr klein. Dennoch ist selbst dann nicht offenkundig, wie die Feldänderung die Bahn beeinflußt. Ein stärkeres Feld würde nämlich einerseits ein Teilchen auf eine engere Bahn zwingen wollen, andererseits würde

die Impulszunahme des Teilchens den Bahnradius vergrößern. Was davon überwiegt nun?

Um dies zu untersuchen, wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem so, daß die x -Achse mit der Magnetfeldrichtung zusammenfällt. \mathbf{B} und $\dot{\mathbf{B}}$ haben dieselbe Richtung:

$$\mathbf{B} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \dot{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt die Bewegungsgleichung in nichtrelativistischer Näherung und mit der Abkürzung

$$\omega(t) := \frac{eB(t)}{m}$$

das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x} = 0 \tag{D2-2}$$

$$\ddot{y} = \omega(t) \dot{z} + \frac{\dot{\omega}}{2} z \tag{D2-3}$$

$$\ddot{z} = -\omega(t) \dot{y} - \frac{\dot{\omega}}{2} y \tag{D2-4}$$

Die erste Gleichung ist von den beiden anderen entkoppelt und zeigt, daß die Komponente der Teilchengeschwindigkeit parallel zum Magnetfeld konstant bleibt. Für $y(t)$ und $z(t)$ verbleibt ein System zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit allerdings nicht nur konstanten Koeffizienten. Zu erwarten ist, daß sich kreisähnliche Bahnen ergeben, wobei nicht offenkundig ist, wie der Radius vom Magnetfeld abhängt. Er wird sowohl durch die sich ändernde Feldstärke wie auch durch seine sich ändernde Energie beeinflußt.

Es ist naheliegend, Polarkoordinaten

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

zu verwenden. Mit den Abkürzungen $c := \cos \varphi$ und $s := \sin \varphi$ führt das auf das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{r}s + 2\dot{r}\dot{\varphi}c + r\ddot{\varphi}c - r\dot{\varphi}^2s = \omega\dot{r}c - \omega r\dot{\varphi}s + \frac{\dot{\omega}}{2}rc \tag{D2-5}$$

$$\ddot{r}c - 2\dot{r}\dot{\varphi}s - r\ddot{\varphi}s - r\dot{\varphi}^2c = -\omega\dot{r}s - \omega r\dot{\varphi}c - \frac{\dot{\omega}}{2}rs \quad (\text{D2-6})$$

Wenn man erstens (D2-5) mit s und (D2-6) mit c multipliziert und die Summe bildet und zweitens (D2-5) mit c und (D2-6) mit s multipliziert und die Differenz bildet, erhält man die beiden einfacher erscheinenden Differentialgleichungen

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\omega r\dot{\varphi}, \quad (\text{D2-7})$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \omega\dot{r} + \frac{\dot{\omega}}{2}r. \quad (\text{D2-8})$$

Gleichung (D2-8) lässt sich nach Umformung in

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\varphi} - \frac{\dot{\omega}}{2}}{\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2}}$$

integrieren und liefert mit den Integrationskonstanten r_0 und ω_0

$$\frac{r}{r_0} =: \varrho = \sqrt{\frac{\omega_0}{\dot{\varphi} - \frac{\omega}{2}}}. \quad (\text{D2-9})$$

Verwendet man die Umkehrung

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\varrho^2} + \frac{\omega}{2}$$

in (D2-7), so erhält man für ϱ die von φ entkoppelte Differentialgleichung

$$\varrho^3\ddot{\varrho} + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2\varrho^4 = \omega_0^2. \quad (\text{D2-10})$$

Für diese Differentialgleichung ist keine analytische Lösung bekannt. Falls allerdings näherungsweise $\dot{\varphi} = \omega$ gilt, dann folgt aus Gleichung (D2-9) für den Bahnradius

$$\varrho = \sqrt{\frac{2\omega_0}{\omega}} \equiv \sqrt{\frac{2B_0}{B}}.$$

Der Bahnradius wird im homogenen Magnetfeld also kleiner, wenn die Feldstärke zunimmt, und die Winkelgeschwindigkeit steigt.

D.3 Das Betatron

Eine technisch wichtige Variante ist das Betatron, in dem durch ein zeitlich ansteigendes Magnetfeld Elektronen auf relativistische Energien (≈ 20 MeV) beschleunigt werden. Bei diesem Gerät soll der Bahnradius konstant gehalten werden, wozu — wir wir gesehen haben — das Magnetfeld *nicht* homogen sein darf.

Es werden vielmehr rotationssymmetrische Felder mit geeigneter r -Abhängigkeit verwendet. Das beschleunigende elektrische Feld ist durch die Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche gegeben, die durch die kreisförmige Teilchenbahn begrenzt wird. Wirksam ist also der Mittelwert $\langle B \rangle$ des Feldes über diese Fläche. Die Bahn hingegen wird durch den lokalen Wert $B(R)$ der magnetischen Feldstärke beim Teilchenbahnradius R definiert.

Aus der Induktionsgleichung $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ erhalten wir für den Betrag des in Bahnrichtung liegenden \mathbf{E} -Feldes

$$E = \frac{R}{2} \langle \dot{B} \rangle.$$

Daher ist

$$\dot{p} = eE = \frac{eR}{2} \langle \dot{B} \rangle. \quad (\text{D3-1})$$

Aus der Beziehung

$$R = \frac{p}{eB(R)}$$

für den Bahnradius folgt

$$p = eRB$$

und durch Differentiation

$$\dot{p} = eR\dot{B}(R). \quad (\text{D3-2})$$

Eine Bahn mit konstantem Radius R ist also nur möglich, wenn

$$\dot{B}(R) = \frac{1}{2} \langle \dot{B} \rangle$$

oder

$$B(R) = \frac{1}{2} \langle B \rangle + B_0 \quad (\text{D3-3})$$

ist (Wiederösesche Betatronbedingung). Sie kann durch geeignete Form der Polschuhe des Elektromagneten erfüllt werden. Mit der Integrationskonstanten, dem zeitlich konstanten Feld B_0 , kann die Bahn justiert werden.

D.4 Homogenes Magnetfeld, das seine Richtung ändert

Anfangs liege das Magnetfeld wiederum in x -Richtung. Es drehe sich gleichmäßig um die z -Achse:

$$\mathbf{B}(t) = B \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{B}}(t) = B\Omega \begin{pmatrix} -\sin \Omega t \\ \cos \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

\mathbf{B} und $\dot{\mathbf{B}}$ stehen also senkrecht aufeinander.

Der erste Term auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (D1-1) ist senkrecht zur momentanen Feldrichtung und bewirkt bei ruhendem Feld eine Kreisbahn senkrecht zur Feldrichtung (abgesehen von einer konstanten Bewegung in Feldrichtung). Der zweite Term versucht, die Achse dieser Kreisbahn zu drehen, und zwar in derselben Richtung, in der sich das Magnetfeld dreht. Nehmen wir an, die Kreisbahn sei momentan in der y - z -Ebene und $\dot{\mathbf{B}}$ sei in der y -Richtung, dann ist diese Kraft gleich Null, wenn das Teilchen die y -Achse kreuzt. Sie weist bei positiver Teilchenladung e in $+x$ -Richtung, wenn es die positive z -Achse kreuzt, und in $-x$ -Richtung wenn es die negative z -Achse kreuzt. Sie lenkt daher Teilchen beider Ladungsvorzeichen nach links ab, wenn sich das \mathbf{B} -Feld um die z -Achse nach links dreht.

Bei einer Kreisbahn senkrecht zur momentanen Magnetfeldrichtung liegen der Ortsvektor, der Impulsvektor und der Vektor der Magnetfeldänderung alle in der Kreisbahnebene. Daher erfährt das Teilchen entsprechend Gleichung (D1-2) in diesem Fall keine Energieänderung.

Aus der Bewegungsgleichung (D1-1) — wiederum in nichtrelativistischer Näherung — ergibt sich mit der Abkürzung $\omega := eB/m$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega \left(-\sin \Omega t \dot{z} + \frac{\Omega}{2} \cos \Omega t z \right) \\ \ddot{y} &= \omega \left(\cos \Omega t \dot{z} + \frac{\Omega}{2} \sin \Omega t z \right) \\ \ddot{z} &= \omega \left(\sin \Omega t \dot{x} - \cos \Omega t \dot{y} - \frac{\Omega}{2} (\cos \Omega t x + \sin \Omega t y) \right) \end{aligned} \quad (\text{D4-1})$$

Dieses System ist schwierig zu lösen. Günstiger ist es vielleicht in Kugelkoordinaten zu handhaben. Wir verwenden die drei orthogonalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{x}_r := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\varphi := \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D4-2})$$

mit

$$\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\vartheta = \mathbf{x}_\vartheta \cdot \mathbf{x}_\varphi = \mathbf{x}_\varphi \cdot \mathbf{x}_r = 0$$

und

$$\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\vartheta = \mathbf{x}_\varphi, \quad \mathbf{x}_\vartheta \times \mathbf{x}_\varphi = \mathbf{x}_r, \quad \mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_\vartheta$$

und den Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r &= \dot{\vartheta} \mathbf{x}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{x}}_\vartheta &= \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{x}_\varphi - \dot{\vartheta} \mathbf{x}_r, \\ \dot{\mathbf{x}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{x}_r - \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{x}_\vartheta. \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Ortsvektor und seine beiden ersten Ableitungen

$$\mathbf{x} = r \mathbf{x}_r \quad (\text{D4-3})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \mathbf{x}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{x}_\vartheta + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{x}_\varphi \quad (\text{D4-4})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \left(\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) \mathbf{x}_r + \left(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \right) \mathbf{x}_\vartheta \\ &\quad + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \cos \vartheta + r\ddot{\varphi} \sin \vartheta \right) \mathbf{x}_\varphi \quad (\text{D4-5}) \end{aligned}$$

Das Magnetfeld \mathbf{B} und seine Ableitung $\dot{\mathbf{B}}$ lassen sich durch ihre Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren (D4-2) unter Verwendung der Abkürzungen $c\vartheta := \cos \vartheta$ und $s\vartheta := \sin \vartheta$ ausdrücken als

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} B_r \\ B_\vartheta \\ B_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_r \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_\vartheta \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_\varphi \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} s\vartheta \cos(\varphi - \Omega t) \\ c\vartheta \cos(\varphi - \Omega t) \\ -\sin(\varphi - \Omega t) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \dot{B}_r \\ \dot{b}_\vartheta \\ \dot{B}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{x}_r \\ \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{x}_\vartheta \\ \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{x}_\varphi \end{pmatrix} = B\Omega \begin{pmatrix} s\vartheta \sin(\varphi - \Omega t) \\ c\vartheta \sin(\varphi - \Omega t) \\ \cos(\varphi - \Omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hiermit lassen sich in der Bewegungsgleichung die Terme $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ und $(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{B}})/2$ berechnen. Man erhält in diesen Koordinaten

$$\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{B} = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi} s\vartheta c\vartheta \cos(\varphi - \Omega t) - r\dot{\vartheta} \sin(\varphi - \Omega t) \\ r\dot{\varphi} s\vartheta^2 \cos(\varphi - \Omega t) + \dot{r} \sin(\varphi - \Omega t) \\ (\dot{r} c\vartheta - r\dot{\vartheta} s\vartheta) \cos(\varphi - \Omega t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{B}}}{2B} = \frac{r\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\varphi - \Omega t) \\ c\vartheta \sin(\varphi - \Omega t) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die entsprechenden drei Komponenten der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2 s\vartheta^2 &= -\omega r \left(\dot{\varphi} s\vartheta c\vartheta \cos(\varphi - \Omega t) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\vartheta} \sin(\varphi - \Omega t) \right), \\ 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2 c\vartheta s\vartheta &= \omega \left(\left(r\dot{\varphi} s\vartheta^2 - \frac{r\Omega}{2} \right) \cos(\varphi - \Omega t) \right. \\ &\quad \left. + \dot{r} \sin(\varphi - \Omega t) \right), \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} s\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi} c\vartheta + r\ddot{\varphi} s\vartheta &= \omega \left(\left(\dot{r} c\vartheta - r\dot{\vartheta} s\vartheta \right) \cos(\varphi - \Omega t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r\Omega}{2} c\vartheta \sin(\varphi - \Omega t) \right). \end{aligned} \tag{D4-6}$$

Auch für dieses System ist es schwierig, eine allgemeine Lösung zu finden. Es sollen daher spezielle Fälle betrachtet werden.

Falls das Magnetfeld seine Richtung nicht ändert, so daß wir formal $\Omega t = \varphi_0$ setzen können, müßte eine Kreisbewegung um eine Achse in der x - y -Ebene mit der Kreisfrequenz ω eine Lösung sein. Tatsächlich erfüllt

$$\begin{aligned} r &= r_0, & \dot{r} &= 0, & \ddot{r} &= 0, \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{\pi}{2}, & \dot{\varphi} &= 0, & \ddot{\varphi} &= 0, \\ \vartheta &= \omega t + \vartheta_0, & \dot{\vartheta} &= \omega, & \ddot{\vartheta} &= 0. \end{aligned}$$

das Gleichungssystem (D4-6).

Interessant ist insbesondere, ob sich bei einer Drehung des Magnetfeldes diese Kreisbewegung einfach mitdreht, so daß $\varphi = \Omega t + \pi/2$ und $\vartheta = \omega t + \vartheta_0$ ist. Das Gleichungssystem (D4-6) ergäbe dann die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\Omega^2 \sin^2(\omega t + \vartheta_0) &= 0, \\ \Omega^2 \sin 2(\omega t + \vartheta_0) &= 0, \\ \Omega \left(1 - \frac{1}{4}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{D4-7}$$

Sie sind bei ausreichend langsamer Drehung des Magnetfeldes ($\Omega^2 \ll \omega^2$) zwar näherungsweise erfüllt, zeigen aber, daß die einfache Mitdrehung keine strenge Lösung ist.

Eine naheliegende Variante wäre eine Mitdrehung, jedoch analog zu einem mechanischen Kreisel bei geneigter Bahn, letzteres entweder bei konstantem Abstand r vom Ursprung oder bei konstantem senkrechtem Abstand ϱ von der zentralen Magnetfeldlinie.

Bei konstantem Abstand r vom Ursprung erhält man die Teilchenbahn aus einem Vektor der Länge r in y -Richtung, auf die Gyration um die x -Achse, die Neigung um die y -Achse und die Mitdrehung um die z -Achse wirken, als

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Mitdrehung}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}}_{\text{Neigung}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ 0 & \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{\text{Gyration}} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \Omega t \sin \alpha \sin \omega t - \sin \Omega t \cos \omega t \\ \sin \Omega t \sin \alpha \sin \omega t + \cos \Omega t \cos \omega t \\ \cos \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wenn hingegen bei der Neigung der Abstand ϱ von der Magnetfeldlinie konstant bleiben soll, ist statt von dem Vektor

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von dem Vektor

$$r \begin{pmatrix} z \sin \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auszugehen.

Weiterhin sind, falls notwendig, folgende Fälle zu untersuchen:

- nur $\dot{r} = 0$, aber nicht $\varphi = \Omega t$ sowie $\dot{\vartheta} = \omega$;
- nur $\dot{\vartheta} = \omega$, aber nicht $\varphi = \Omega t$ sowie $\dot{r} = 0$;
- nur $\dot{\varphi} = \Omega$, aber nicht $\dot{r} = 0$ sowie $\dot{\vartheta} = \omega$.

D.4.1 Betrachtung in einem mitrotierenden Koordinatensystem

Alternativ ließe sich der Fall des rotierenden homogenen Magnetfeldes in einem mitrotierenden Koordinatensystem behandeln. Das Magnetfeld ist darin konstant, so daß kein elektrisches Feld induziert wird. Dafür sind aber die Coriolis-Beschleunigung $-2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{x}}$ und die Fliehbeschleunigung $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})$ zu berücksichtigen. Die Bewegungsgleichung lautet mit

$$\frac{q\boldsymbol{B}}{m} =: \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$$

demgemäß

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) \quad (\text{D4-8})$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} + 2\boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D4-9})$$

Die beiden zusätzlichen Kräfte rechts verhindern, daß die Bewegung aus einer festen Kreisbahn senkrecht zum Feld bestehen kann.

Würde man den letzten Term in Gleichung (D4-8) bzw. in Gleichung (D4-9) wegen ausreichend langsamer Drehung vernachlässigen, dann hätten wir es mit der bekannten helix- oder kreisartigen Bewegung um eine leicht geneigte Feldrichtung zu tun.

D.5 Magnetfeld mit Gradienten senkrecht zur Feldrichtung

Wir wählen als z -Richtung die Magnetfeldrichtung. Die Feldstärke ändere sich in y -Richtung linear. Das Feld ist dann zu schreiben als

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 + \nabla B \cdot y \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + by \end{pmatrix}.$$

Mit den Abkürzungen $\omega = eB_0/m$ und $b := \nabla B/B_0$ lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega(1+by)\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega(1+by)\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}$$

Die ersten beiden Differentialgleichungen sind gekoppelt und lassen sich wegen der Terme mit b im allgemeinen auch nicht entkoppeln. Wie im Falle $b = 0$ findet man aber ein erstes Integral, das die Erhaltung des Quadrats der Geschwindigkeit senkrecht zur Feldrichtung liefert, indem man die erste Gleichung mit \dot{x} und die zweite mit \dot{y} multipliziert und beide dann addiert. Man erhält

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_{\perp 0}^2.$$

Entkoppeln lassen sich die beiden Gleichungen nur für $b = 0$, d. h. wenn das Feld keinen Gradienten hat. Indem man beide Gleichungen noch einmal nach der Zeit differenziert und die zweiten Ableitungen aus der jeweils anderen Gleichung einsetzt, erhält man nach einmaliger Integration das System

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega^2(x - x_0) \\ \ddot{y} &= -\omega^2(y - y_0)\end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned}x &= A \sin \omega t - B \cos \omega t + x_0 \\y &= B \sin \omega t + A \cos \omega t + y_0\end{aligned}$$

Sie beschreiben eine Kreisbewegung um die Feldrichtung.

Das gleiche Verfahren führt bei $b \neq 0$ auf die Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega^2 \dot{x} - 2\omega^2 b y \dot{x} + \omega b \dot{y}^2 - \omega^2 b^2 y^2 \dot{x} \\ \ddot{y} &= -\omega^2 \dot{y} - 2\omega^2 b y \dot{y} - \omega b \dot{y} \dot{x} - \omega^2 b^2 y^2 \dot{y}\end{aligned}$$

Selbst wenn man die Glieder mit b^2 bei ausreichend schwachem Feldgradienten vernachlässigt, bleiben die Gleichungen gekoppelt. Eine Linearkombination der beiden ergibt die Differentialgleichung zweiter Ordnung für \dot{x} und \dot{y}

$$\dot{x} \ddot{x} - \dot{y} \ddot{y} = \omega b \dot{y}^2 (\dot{y} + \dot{x})$$

Versuchen könnte man eine Näherungslösung mit einer Drift in x -Richtung, wie sie sich aus der Näherung mit sehr schwachem Gradienten (nahezu Kreisbahnen liefernd) ergibt. Der Betrag der Driftgeschwindigkeit ist danach

$$v_D = \frac{\frac{m}{2} v_\perp^2 b}{-qB_0} = \frac{\varrho v_\perp p}{2} = \frac{\varrho b}{2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad \text{mit} \quad \varrho = \frac{mv_\perp}{-qB}.$$

Ebenfalls könnte man einen Ansatz mit einer y -abhängigen Kreisfrequenz ω probieren.