Schiefer Turm als Stapel rechteckiger Platten

Gegeben seien gleichartige rechteckige homogene Platten der Länge $B = 1$ und der Masse $M = 1$. Sie sollen ohne feste Verbindung so zu einem Turm gestapelt werden, daß sich die oberste Platte an keinem Punkt mehr senkrecht über der untersten Platte befindet.[1]

Fragen:

- Ist das möglich?
- Wie viele Platten sind dazu mindestens erforderlich?
- Wie sind die Platten anzuordnen?

Zur Antwort: Der Schwerpunkt s eines Körpers ist definiert als

$$s = \sum_i x_i m_i / \sum_i m_i . \tag{1}$$

Wenn der Körper im Schwerpunkt unterstützt wird, dann bewirkt sein Gewicht kein Drehmoment.

Ich betrachte zuerst die oberste Platte_1. Sie erstrecke sich von $x_1 = 0$ bis $x_1 = B$. Ihr Schwerpunkt liegt in ihrer Mitte bei $x_{s1} = B/2$.

Die Platte darunter kann höchstens so weit nach links verschoben liegen, daß dieser Schwerpunkt noch über ihr liegt. Die rechte Kante der zweiten Platte liegt dann also um $B/2$ nach links gegenüber der rechten Kante der ersten Platte versetzt.

Der Schwerpunkt der N-ten Platte ergibt sich aus ihrer Masse M und ihrem eigenen Schwerpunkt, der in ihrer Mitte bei $B/2$ liegt, und dem Schwerpunkt

[1] Siehe dazu auch https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe#Anwendungsbeispiel

aller darüberliegenden Platten der Gesamtmasse $(N-1)\,M$, der an ihrer rechten Kante wirkt. Er liegt also, gerechnet von ihrer linken Kante, bei

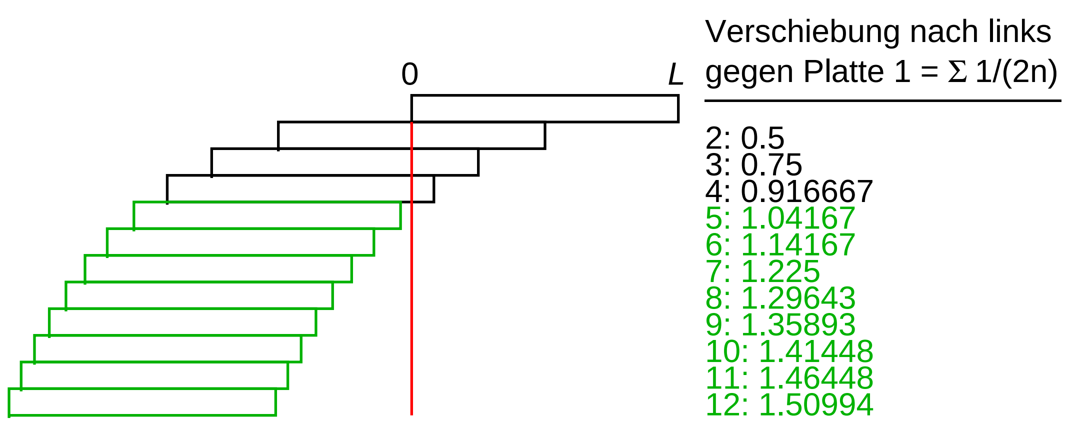
$$xs_N = B\left(\frac{1}{2}\cdot M + (N-1)\,M\right)/(N\,M) = B\left(1-\frac{1}{2N}\right). \tag{2}$$

Die Gesamtverschiebung der rechten Kante der N-ten Platte gegenüber der linken Kante der ersten Platte summiert sich aus den Verschiebungen der darüberliegenden Platten zu

$$\Delta x = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{B}{2n} = \frac{B}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}. \tag{3}$$

Die Summe in Gleichung (3) aus positiven Summanden konvergiert nicht sondern nimmt mit wachsendem N weiter zu wenn auch immer langsamer. Das bedeutet zunächst schon, daß dabei jeder Wert, hier insbesondere Eins, überschritten werden kann. Es ist daher möglich, den schiefen Turm mit der genannten Nebenbedingung aus Platten aufzustapeln.

Die Gesamtverschiebung ist für die obersten 12 Platten in der Zeichnung angegeben.

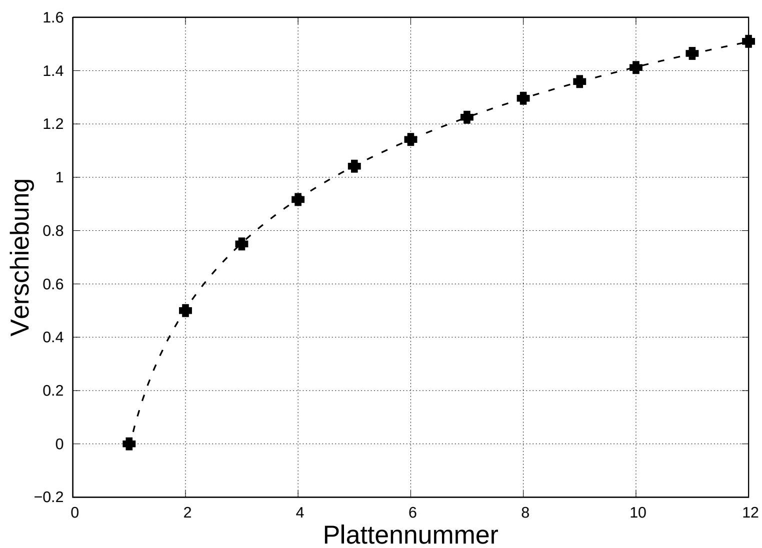


Ergebnis: Wie die Zeichnung zeigt, ist es auf die beschriebene Art möglich, Platten so zu stapeln, daß in diesem schiefen Turm die oberste Platte nicht mehr die fünfte Platte darunter überdeckt. Fünf Platten sind also mindesten für eine Lösung der Aufgabe erforderlich.

Anmerkung: Die Summe der Verschiebungen jeder Platte wird als eine harmonische Funktion[2] der Plattennummer N bezeichnet. Sie ist in der vorigen Zeichnung zahlenmäßig angegeben. Durch die logarithmische Funktion läßt sie sich gut annähern.

$$f(x) = \log(x - 0.45) + 0.57 \tag{4}$$

gut näherungsweise darstellen, wie die gestrichelte Linie in der folgenden Abbildung zeigt.



[2] Jedes Glied ist das harmonische Mittel der beiden benachbarten Glieder. Das harmonische Mittel a von a_1 und a_2 ist gegeben durch $\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}{2}$.