G. Green

Über den Abstand windschiefer Geraden

Dies soll hier koordinatenfrei, d. h. ohne Benutzung eines Koordinatensystems behandelt werden.

Zwei Geraden seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &= \boldsymbol{P} + \lambda \boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{h} &= \boldsymbol{Q} + \mu \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{1}$$

Sie heißen windschief, wenn sie sich nicht schneiden und wenn die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ verschiedene Richtungen haben und somit $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq 0$ ist. Dieser Normalenvektor ist zu den Richtungsvektoren beider Geraden senkrecht.

Als Abstand d zweier Geraden bezeichnet man die Länge des kürzesten Verbindungsvektors eines Punktes auf der einen von einem Punkt auf der anderen Geraden. Der Abstand ist die Komponente des Verbindungsvektor in Richtung der Normalen der beiden Geraden. Es gilt also

$$\begin{aligned} d &= (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}) \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \\ &= (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} + \mu \boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{u}) \cdot \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|} \\ &= (\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}) \cdot \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich, weil für die Spatprodukte im mittleren Ausdruck

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3}$$

gilt.

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden ist also unabhängig von den Laufparametern λ und μ und läßt sich bereits durch die Aufpunkte $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ ausdrücken.

Wo, d. h. bei welchem Wertepaar λ und μ, liegen die Punkte, zwischen denen die Verbindung $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}$ am kürzesten ist? Das ist dort, wo die Verbindungslinie im rechten Winkel zu beiden Geraden steht. Dort gilt

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{Q} + \mu\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{P} + \lambda\boldsymbol{u})) \cdot \boldsymbol{u} &= 0, \\ ((\boldsymbol{Q} + \mu\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{P} + \lambda\boldsymbol{u})) \cdot \boldsymbol{v} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich für λ und μ mit der Abkürzung $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} =: \boldsymbol{w}$ das lineare Gleichungsystem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - \lambda &= 0, \\ \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} + \mu - \lambda\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

wobei für beide Richtungsvektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ die Länge 1 angenommen ist. Es hat die Lösung

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{1 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}, \\ \mu &= -\frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{1 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

die in Gleichung (1) einzusetzen ist.

Im Spezialfall, daß beide Richtungsvektoren senkrecht zu einander stehen, reduziert sich die Lösung auf

$$\begin{aligned} \lambda &= \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}, \\ \mu &= -\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{7}$$

Über den Abstand zweier paralleler Geraden

Auch dies läßt sich koordinatenfrei beschreiben. Die Geraden seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &= \boldsymbol{P} + \lambda \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{h} &= \boldsymbol{Q} + \mu \boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ihr Abstand läßt sich – wiederum mit der Abkürzung $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} =: \boldsymbol{w}$ – angeben als

$$d = |\boldsymbol{u}| \sqrt{\boldsymbol{w}^2 - (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})^2} = |\boldsymbol{u}| \, |\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}| \, . \tag{9}$$

Die letzte Form ist nur im dreidimensionalen Raum anwendbar.

Wenn auf der ersten Geraden ein Punkt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} + \lambda \boldsymbol{u}$ vorgegeben ist, mit welchem Punkt $B = \boldsymbol{Q} + \mu \boldsymbol{u}$ muß er für einen kürzesten Abstand auf der zweiten Geraden verbunden werden? Es muß

$$\mu = \lambda - \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} \tag{10}$$

gewählt werden, wie dies aus Abb. 1 erkennbar ist.

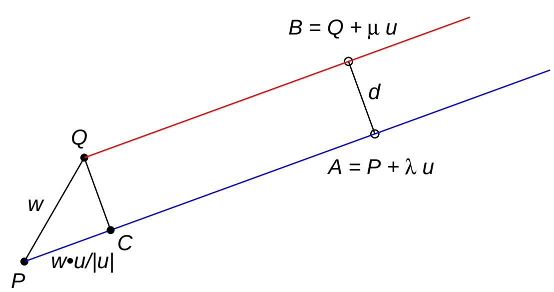

Abbildung 1: Der Laufparameter μ für denjenigen Punkt B auf der zweiten Geraden, der zu einem Punkt A auf der ersten Geraden den kürzesten Abstand hat, unterscheidet sich vom Laufparameter λ durch die Strecke PC, also die Komponente des Vektors $\boldsymbol{w}$ in Richtung des Richtungsvektors $\boldsymbol{u}$ der parallelen Geraden.