

Günter Green

Rekonstruktion von Intensitätswinkelverteilungen aus sektorweisen Mittelwerten: objektiv oder subjektiv – das ist hier die Frage

Eine Winkelverteilung ist nicht eindeutig bestimmt, wenn von ihr nur sektorweise Mittelwerte gemessen worden sind. Hier soll nun ein Verfahren beschrieben werden, das ich auf Grund einer kritische Analyse des Meßprozesses entwickelt habe und das unter den vielen möglichen Rekonstruktionen diejenige Winkelverteilung liefert, die am wenigsten durch subjektive vorgefaßte Vorstellungen beeinflußt ist.

Sie hat folgende wünschenswerte Eigenschaften: Sie wird nirgends negativ. Sie läßt die Sektorgrenzen nicht mehr in Erscheinung treten. Sie läßt sich außerordentlich gut durch eine harmonische Summe annähern und bietet sich daher für eine weitere bequeme algebraische Auswertung an.

Das Verfahren läßt sich auch auf zweidimensionale Verteilungen anwenden, also etwa auf pixelweise gerasterte Bilder, bei denen es die Rasterung verschwinden läßt.

Über die Eindeutigkeit der Rekonstruktion

Wenn nur sektorweise Mittelwerte der Intensität vorliegen, dann ist die Rekonstruktion einer kontinuierlichen Winkelverteilung nicht eindeutig. Abbildung 1 zeigt für den Fall, daß nur in einem einzigen Sektor ein positiver Mittelwert Y existiert, daß man leicht mehrere Verteilungen $y(x)$ angeben kann, die in diesem Sektor der Breite Δx den Mittelwert

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} y(x) dx = Y$$

haben.

Die Formen machen unterschiedlich genaue Aussagen darüber, wie sich die Intensität innerhalb des Sektors verteilt. Die ungenaueste Aussage macht das letzte Beispiel mit dem rechteckigen Verlauf, bei dem die Intensität im ganzen Sektor als gleichverteilt angenommen wird. Alle genaueren Aussagen

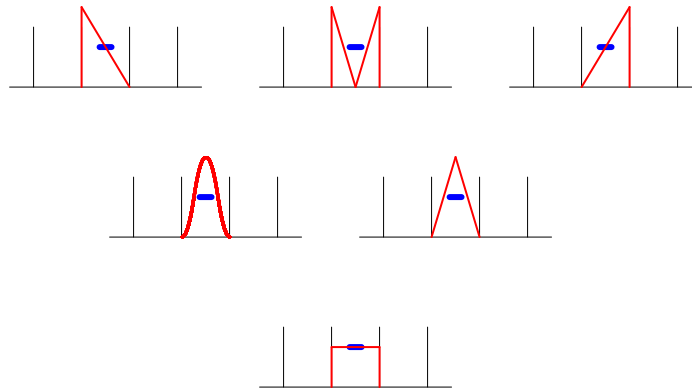


Abbildung 1: Zu einem gemessenen Sektormittelwert (blau) der Intensität lassen sich zahllose Verteilungen (rot) angeben, die den gleichen Mittelwert ergeben. Nur die Gleichverteilung im unteren Beispiel ist eine vorurteilsfreie Rekonstruktion.

wie in den anderen Beispielen sind durch die Messung des Mittelwertes nicht gerechtfertigt. Sie enthalten nämlich zusätzliche Information, die als subjektives Vorurteil anzusehen ist. Für eine objektive vorurteilsfreie (engl. unbiased) Auswertung der Daten sind solche Verteilungen deshalb nicht geeignet. Dies entspricht dem Prinzip der maximalen Entropie (Jaynes, 1957):

$$H = \int_{\text{sektor}} y(x) \ln(y(x)) \, dx = \text{Max!}.$$

Entropie H ist das Maß für die Unbestimmtheit der Verteilung.

HELIOS-Experiment zur Messung der kosmischen Strahlung

Für unser Experiment auf HELIOS zur Messung der kosmischen Strahlung haben wir deren Intensität als Mittelwerte in acht 45° breiten Richtungssektoren gemessen, in die wir den Vollkreis eingeteilt haben. Stellt man diese acht diskreten Werte im Sinne der maximalen Entropie als die Kombination von acht Rechteckverteilungen dar, dann verläuft die Verteilung wegen der Sektorisierung in einer unnatürlich wirkenden Weise stufenförmig.

Wir haben deshalb nach einer kontinuierlichen Verteilung gesucht, deren Sektormittelwerte mit den gemessenen übereinstimmen, und hierzu eine Sum-

me aus Kosinus- und Sinusgliedern bis zur vierten Harmonischen genommen. Die Zahl der verfügbaren unabhängigen Koeffizienten ist dabei durch die Zahl der Sektoren beschränkt. Das Prinzip der maximalen Entropie wird dabei allerdings verletzt, indem die acht untersten Koeffizienten ausgewählt wurden. Dennoch wurde dieses Verfahren verwendet, denn es liefert glatte Verteilungen, in denen die Sektorgrenzen nicht mehr erscheinen. Der Vektor der Koeffizienten geht durch eine lineare Transformation aus dem Vektor der acht Sektormittelwerte hervor. Ich habe dies in meiner Habilitationsschrift beschrieben.

Diese Verfahren eignet sich gut für Verteilungen, die nicht sehr anisotrop sind. Bei enggebündelten Verteilungen, im Grenzfall bei solchen, bei denen die gesamte Intensität in nur einen einzigen Sektor fällt, ist die harmonische Anpassung jedoch weniger gut geeignet, denn sie ergibt teilweise negative und damit unphysikalische Intensitäten, wie das Beispiel in Abbildung 2 zeigt.

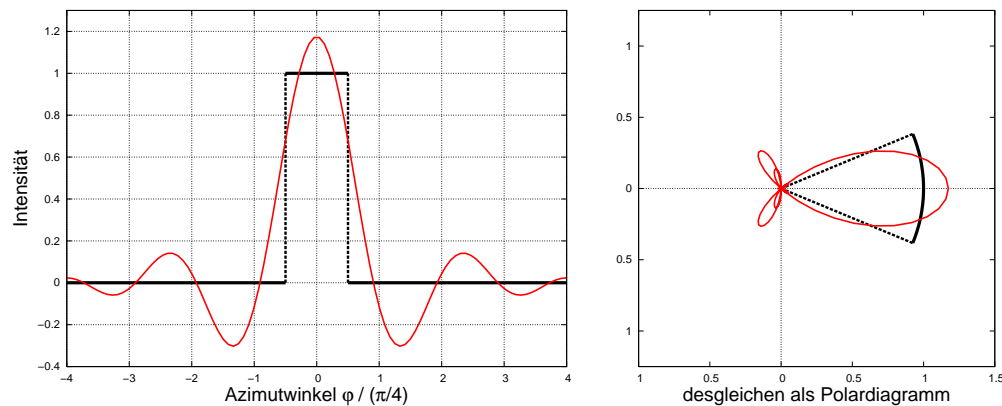


Abbildung 2: Ein-Sektor-Verteilung (schwarz) und harmonische Anpassung (rot) mit teilweise negativen unphysikalischen Intensitätswerten.

Mich hat dies jahrelang unbefriedigt gelassen, und ich habe immer nach einer besseren Alternative gesucht. Jetzt will ich hier eine Möglichkeit beschreiben und zur Diskussion stellen, die diesen Mangel behebt.

Eine neue stetige Anpassung an Sektormittelwerte von Intensitäten: das Sektorrotationsverfahren

Ich behandle zunächst den Fall der engsten Bündelung, so daß nur ein Sektormittelwert einen positiven Wert hat. Wenn keine weitere Information vorliegt, ist wie schon erwähnt davon auszugehen, daß die einfallende Intensität im gesamten Sektor gleichstark ist.

Der entscheidende neue Gedanke ist jetzt:

Die Lage der Sektorgrenzen relativ zur Ausrichtung der einfallenden Intensität ist als zufällig anzusehen. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit könnte das System auch stetig bis zu einer Sektorbreite verdreht liegen. Bei einer solchen Verdrehung würde sich der Inhalt des einen Sektors auf zwei benachbarte verteilen, und zwar gemäß der Überlappung der neuen beiden Sektoren mit dem alten, wie Abbildung 3 zeigt.

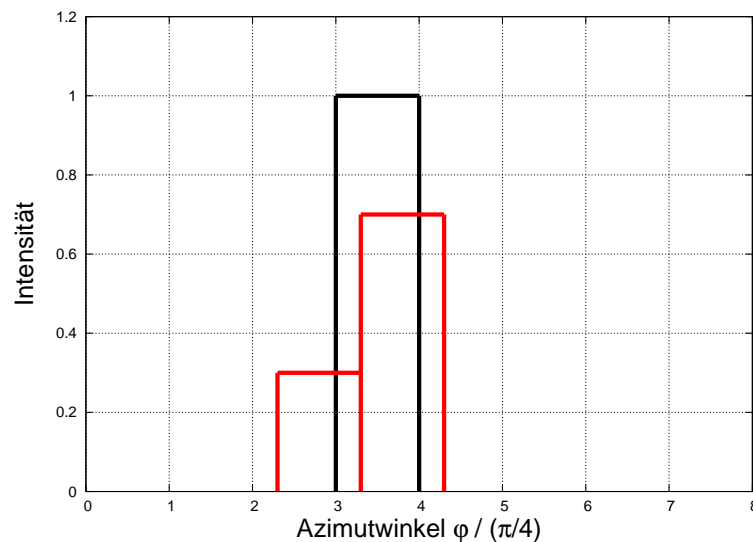


Abbildung 3: Verdreht man ein vorgegebenes Sektorsystem, dann verteilt sich die Intensität eines Sektors (schwarz) auf zwei Sektoren (rot) im Verhältnis der Überlappungen mit dem ursprünglichen Sektor.

Mittelt man jetzt über alle diese Verdrehungen des Sektorsystems, dann ergibt sich daraus eine stetige Intensitätsverteilung, deren Flanken nach beiden Seiten über je eine weitere Sektorbreite auf Null abklingen und außerhalb da-

von Null bleiben. Die entsprechenden Funktionen $y_l(\varphi)$ (linke Flanke), $y_m(\varphi)$ (Mitte) und $y_r(\varphi)$ (rechte Flanke) sind

$$\begin{aligned} y_l(\varphi) &= \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \\ y_m(\varphi) &= Y \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{\varphi}{a} \right)^2 \right) \\ y_r(\varphi) &= \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Sie werden im Anhang A hergeleitet und sind in Abbildung 4 dargestellt. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem setzt sich der Gesamtverlauf aus drei Parabelstücken zusammen, (rot in den Flanken, grün im Mittelstück). Diese modifizierte Verteilung zeigt keinen Sprung mehr an den Sektorgrenzen, und sie wird im Gegensatz zur harmonischen Anpassung nirgends negativ. Je ein Sechstel der Intensität liegt jetzt in jeder der beiden Flanken, und zwei Drittel bleiben in dem ursprünglichen Sektor, denn es ist

$$\int_{-a/2}^{-3a/2} y_l d\varphi = \int_{a/2}^{3a/2} y_r d\varphi = \frac{Y}{6} \quad \text{und} \quad \int_{-a/2}^{a/2} y_m d\varphi = \frac{2}{3} Y.$$

Aus dem ursprünglichen achtkomponentigen Vektor \mathbf{r} der gemessenen

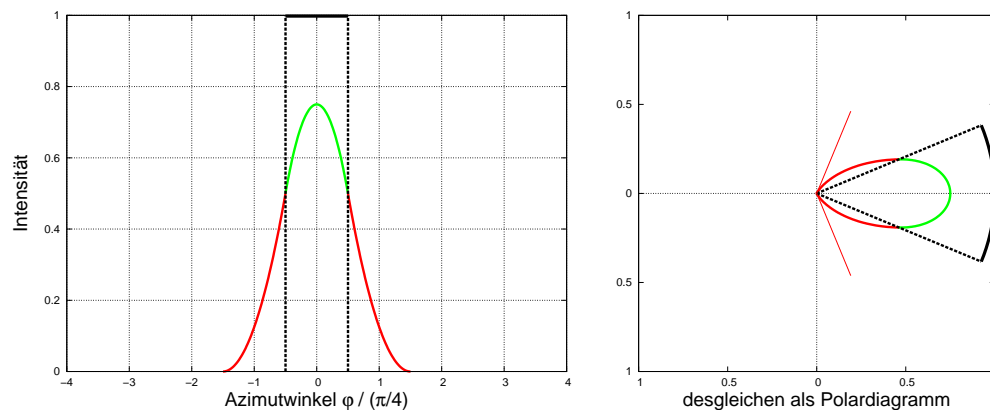


Abbildung 4: Ein-Sektor-Verteilung (schwarz) und ihre Modifikation durch das Sektorrotationsverfahren. Die roten Striche im rechten Bild begrenzen den Winkelbereich, in den hinein sich die glatte Kurve erstreckt.

Sektormittelwerte entsteht also ein neuer Vektor $\tilde{\mathbf{r}}$ durch eine lineare Transformation

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{L} \mathbf{r} \quad (2)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{L} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Man kann jetzt in den drei nebeneinanderliegenden nichtnegativen Sektoren die Mittelwerte verwenden und daran wiederum eine harmonische Summe

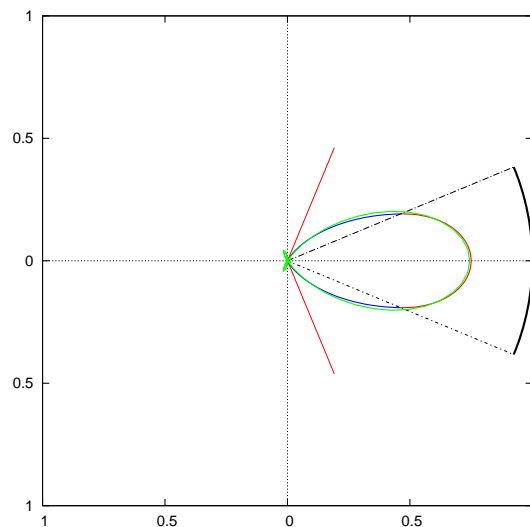


Abbildung 5: Harmonische Anpassung (grün) an die Intensitätsverteilung nach den Gleichungen (1) (blau/rot) aufgrund einer Ein-Sektor-Verteilung (schwarz). Sie wird im Gegensatz zu der harmonischen Anpassung in Abbildung 2 kaum noch negativ.

anpassen. Abbildung 5 zeigt, daß diese Anpassung nur äußerst wenig von der Verteilung in den drei benachbarten Sektoren abweicht, und sie hat selbst in diesem extrem eng gebündelten Fall kaum noch negative Funktionswerte.

Bei weniger anisotropen Intensitäten unterscheiden sich die Mittelwerte in benachbarten Sektoren weniger von einander. Je isotroper die zu messende Intensität ist, um so weniger verändert das hier beschriebene Verfahren zur Mittelung über alle möglichen Lagen des Sektorsystems dann die Sektormittelwerte. Es kommt also im wesentlichen nur dort zum Tragen, wo das bisherige System seine Schwächen zeigt. Abbildung 6 gibt ein Beispiel für die Anwendung auf eine Drei-Sektor-Verteilung.

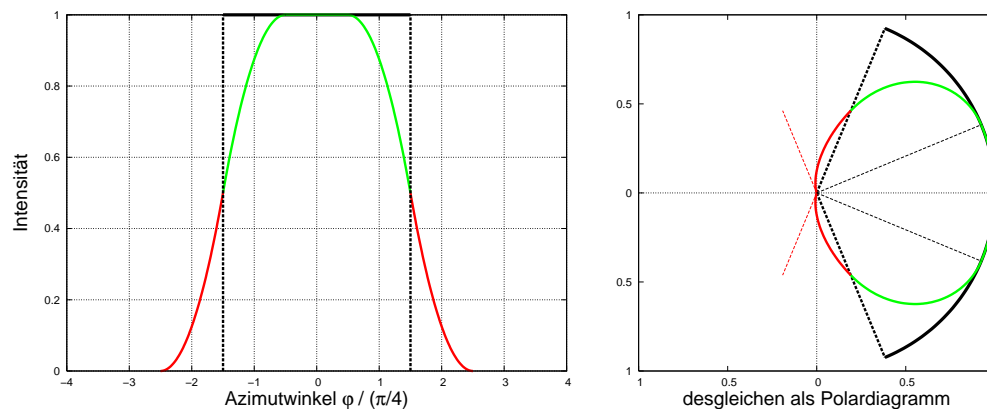


Abbildung 6: Bei einer Verteilung, bei der drei benachbarte Sektoren gleichgroße Intensitätsmittelwerte haben, werden durch das Sektorrotationsverfahren nur die beiden äußeren Sektoren modifiziert, der innere Sektor bleibt unbeeinflusst.

Beliebig vorgegebene Kombinationen von Sektormittelwerten können als lineare Überlagerungen von Ein-Sektor-Verteilungen aufgefaßt werden. Das Verfahren kann daher gleichermaßen erfolgreich auf sie angewendet werden und liefert immer stetige, d. h. sprunghafte nichtnegative Verteilungen, die nicht von der zufälligen Lage des Sektorsystems abhängen. Ein Beispiel demonstriert dies in Abbildung 7.

Der wesentliche Unterschied zum bisherigen Verfahren äußert sich darin, daß die Sektormittelwerte nicht mehr unangetastet bleiben, sondern wegen der Berücksichtigung der zufallsbedingten Lage der Sektorgrenzen relativ zur einfallenden Intensität durch modifizierte Werte ersetzt werden. Diesen entscheidenden Unterschied stelle ich hiermit ausdrücklich zur Diskussion.

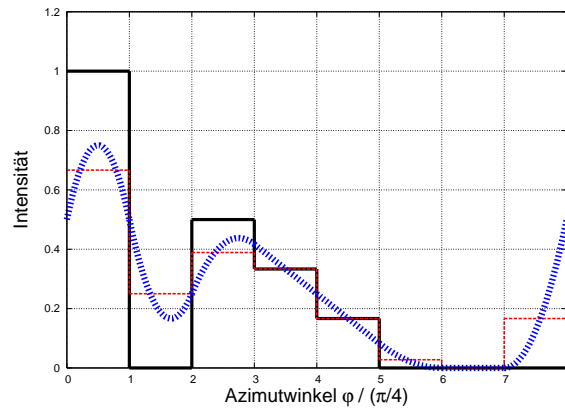


Abbildung 7: Das Sektorrotationsverfahren erzeugt für beliebige gemessene Sektormittelwerte (schwarz) eine stetige nichtnegative Winkelverteilung (blau), in der die experimentbedingten Sektorgrenzen nicht mehr sichtbar sind. Die Sektormittelwerte (rot) dieser Verteilung ersetzen die ursprünglichen Werte.

Die weitere Verarbeitung der Meßdaten im Hinblick auf Pitchwinkelverteilungen, wie ich sie in meiner Habilitationsschrift beschrieben habe, bleibt ungeändert, da lediglich die Ausgangsdaten, nämlich die gemessenen Sektormittelwerte, durch modifizierte Werte ersetzt werden.

Ein möglicher Einwand

Man könnte einwenden, die durch das Sektorrotationsverfahren entstehende Verteilung ergäbe nicht mehr die gemessenen Sektormittelwerte.

Dem ist entgegenzuhalten: Im Geiste dieses Verfahrens ist ja nicht nur die eine Messung zu betrachten sondern das Mittel aus den Messungen mit allen möglichen Ausrichtungen des Sektorsystems.

Geht Information beim Sektorrotationsverfahren verloren?

Es stellt sich natürlich die Frage, ob bei der Transformation (2) der Sektormittelwerte Information verlorengeht. Positiver ausgedrückt: Kann man aus den modifizierten Sektormittelwerten die ursprünglichen zurückgewinnen?

Diese Frage ist zu bejahen, denn die Determinante der Transformationsmatrix \mathbf{L} , Gleichung (3) auf Seite 6, ist nicht Null sondern $37632/6^8 > 0$. Sie ist also invertierbar¹. Ihre Inverse ist im Anhang C als Gleichung (17) angegeben. Die ursprünglichen Sektormittelwerte lassen sich damit als

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}$$

rekonstruieren.

Zum Anisotropiemaß

Das Sektorrotationsverfahren verringert besonders bei sehr eng gebündelten Verteilungen die Anisotropie, definiert als

$$\xi := \frac{a_1 - \frac{3}{5} a_3}{a_0 - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{15} a_4}.$$

Darin ist a_n der Koeffizient des n -ten Kosinustermes.

Die harmonische Anpassung einer Ein-Sektor-Verteilung (siehe Abbildung 2) ergab

$$\xi = 3.37.$$

Dieser Wert ist höher als das theoretische Maximum $\xi_{\max} = 3$, das einer unendlich engen Intensitätsverteilung entspricht, und kommt nur durch die unphysikalischen negativen Funktionswerte der harmonischen Summe zustande. Die harmonische Anpassung der durch das Sektorrotationsverfahren modifizierten Werte (siehe Abbildung 5) liefert hingegen

$$\xi = 2.53.$$

Das Fehlen von merklichen negativen Funktionswerten führt damit auch auf realistische Werte der Anisotropie.

Eine Alternative

Eine weitere Möglichkeit, sprungbehaftete Funktionen zu glätten, kann in der Faltung mit geeigneter Glättungsfunktion² bestehen. Aus einer Funktion $f(t)$

¹Determinante und Inverse sind z. B. mit dem Programm *WolframAlpha* sehr einfach zu berechnen.

²Siehe hierzu [https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Faltung_(Mathematik))

wird durch Faltung mit der Glättungsfunktion $g(\tau)$ die Funktion

$$\bar{f}(t) = \int f(t - \tau) g(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Zu klären bleibt, welche Form der Glättungsfunktion dem hier beschriebenen Verfahren entspricht. Dessen Glättung von rechteckigen Funktionen liefert Parabelbögen. Das deutet auf Geradenstücke in einer Glättungsfunktion im Faltungsintegral hin.

Versuch: Dem Vergleich der Verfahren lege ich die gleiche Rechteckfunktion $f(t)$ wie in Abb. 4 auf Seite 5 zugrunde mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a/2 \leq t \leq a/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

(hier mit $a = 1$) bzw.

$$f(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t - \tau \leq a \Leftrightarrow t + a > \tau > t - a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

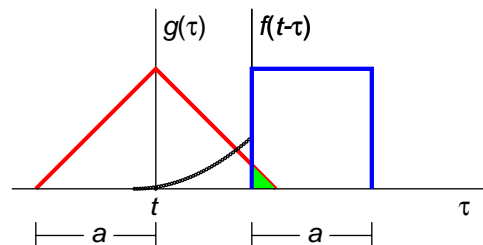
Als Glättungsfunktion wähle ich einen dreieckigen Verlauf

$$g(\tau) = \begin{cases} 1 + (\tau - t) & \text{für } t - a \leq \tau < t \\ 1 - (\tau - t) & \text{für } t \leq \tau \leq t + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

mit ihrem Schwerpunkt bei $\tau = t$.

Dem Faltungsintegral (4) entspricht die gemeinsame Fläche unter $f(t - \tau)$ und $g(\tau)$.

Links vom gegebenen Rechteckimpuls ergibt sich die geglättete Funktion



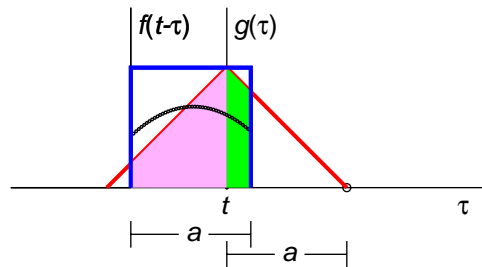
aus der Zeichnung als

$$\overline{f}_L(t) = \frac{(a+t)^2}{2} \quad (8)$$

mit

$$\overline{f}_L(0) = \frac{a}{2} \text{ und } \overline{f}_L(-a) = 0.$$

Innerhalb des Rechteckimpulses

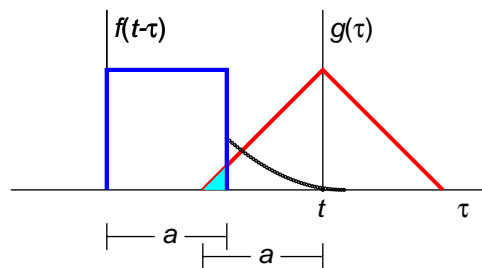


Mit Hilfe der weißen Dreiecke über den beiden farbig markierten Flächen erhält man als geglättete Funktion (schwarz gezeichnet)

$$\overline{f}_M(t) = \frac{a^2}{2} + at - t^2. \quad (9)$$

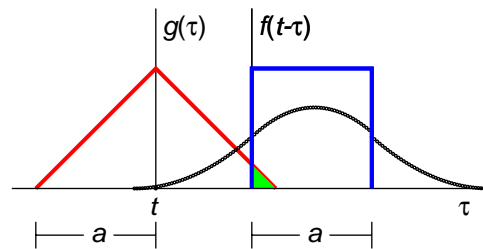
Rechts vom gegebenen Rechteckimpuls ist gemäß Zeichnung die geglättete Funktion (auch hier schwarz gezeichnet)

$$\overline{f}_R(t) = \frac{(2a-t)^2}{2}. \quad (10)$$



Ergebnis:

Insgesamt ergibt sich also als Glättung der Rechteckfunktion durch Faltung mit der Dreiecksfunktion das folgende Bild



Es scheint also völlig demjenigen in Abb. 4 auf Seite 5 zu entsprechen, das vom Sektorrotationsverfahren erzeugt wird.

Was die Zeichnung vermuten läßt, kann für die zugehörigen Funktionsgleichungen bestätigt werden, nämlich durch Vergleich einerseits der Formeln (8), (9) und (10) bei der Glättung durch Faltung mit andererseits den Formeln (13) auf Seite 16 beim Sektorrotationsverfahren.

Dabei ist zu beachten: Das Rechteck beginnt im Faltungsverfahren bei $t = 0$ und hat die Breite a . Im Sektorrotationsverfahren beginnt es aber bei $\varphi = -a/2$ und hat dort die Breite 1 und die Höhe Y . Wenn man deshalb für den Vergleich dort die Rechteckbreite auf $a = 1$ und die Höhe auf Y setzt und statt x jetzt $x - a/2$ schreibt, dann ergeben sich in beiden Verfahren die gleichen drei Funktionsgleichungen³.

Beide Verfahren sind also äquivalent.

Allerdings hat sich die dreieckige Form der Glättungsfunktion für das Faltungsverfahren erst durch das Sektorrotationsverfahren ergeben. Ob es gleichwertige andere Funktionen gibt, ist ungewiß. Über die Laplace-Transformation einer Faltung ließe sich klären, ob sie bei einer Glättung keinen Informationsverlust verursacht.⁴

Ein Vorteil des Sektorrotationsverfahrens ist seine klare informationstheoretische Begründung.

³Siehe Seite 21

⁴Vergleiche hierzu Seite 8

Zweidimensionale Verteilungen

Das beschriebene Verfahren läßt sich auf Intensitätsverteilungen verallgemeinern, die von zwei Koordinaten abhängen. Eine Fläche sei überdeckt von quadratischen Pixeln der Kantenlänge a , in denen je eine mittlere Intensität vorliege. Auch hier gehe ich davon aus, daß die Lage dieses Pixelssystems willkürlich ist.

Ich betrachte ein einzelnes solches Quadrat, dessen Mitte im Ursprung eines x - y -Koordinatensystems liegt, und überdecke es mit ebenso großen Quadraten, die um maximal eine Kantenlänge in Richtung beider Kanten, also in x - und in y -Richtung verschoben sein können. Eine im ursprünglichen Quadrat mangels besseren Wissens als gleichförmig angenommene Intensität Z verteilt sich auf die verschobenen Quadrate, und im Mittel über alle diese Quadrate entsteht eine neue sprunghafte Intensitätsverteilung, die sich zu Lasten des ursprünglichen Quadrats auch in die benachbarten acht Quadrate erstreckt. Dies sind die Quadrate an den Seiten und an den Ecken des ursprünglichen (farbig markierten) Quadrats, die in in der Abbildung 8 durch Ziffern gekennzeichnet sind.

Die bei diesem Verfahren der Verschiebungen des Pixelrasters in allen neun

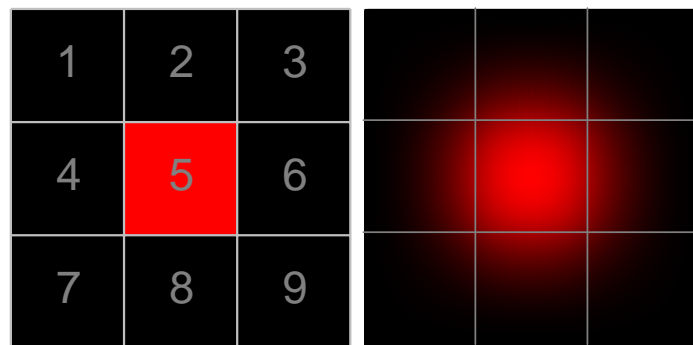


Abbildung 8: Links ein einzelnes Pixel (farbig gekennzeichnet) mit positiver mittlerer Intensität und seine Nachbarquadrate (schwarz) mit Intensität Null. Rechts: Durch Mittelung über alle Verschiebungen des Pixelrasters ergibt sich aus dem Intensitätswert des einzelnen Pixels (links) eine kontinuierliche Intensitätsverteilung, die sich zu Lasten des Ausgangspixels auch in die Positionen der acht Nachbarpixel erstreckt.

Quadraten entstehende kontinuierliche Intensitätsverteilung ist rechts in Abbildung 8 durch den Grad der Helligkeit dargestellt.

Die Intensitätsverläufe werden durch die folgenden Funktionen beschrieben, die im Anhang B hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 z_1(x, y) &= \frac{Z}{4} \left(\frac{x}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{y}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \\
 z_2(x, y) &= \frac{Z}{2} \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \left(\frac{y}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \\
 z_3(x, y) &= \frac{Z}{4} \left(\frac{x}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{y}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \\
 z_4(x, y) &= \frac{Z}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right) \\
 z_5(x, y) &= Z \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right) \\
 z_6(x, y) &= \frac{Z}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right) \\
 z_7(x, y) &= \frac{Z}{4} \left(\frac{x}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{y}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \\
 z_8(x, y) &= \frac{Z}{2} \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \left(\frac{y}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \\
 z_9(x, y) &= \frac{Z}{4} \left(\frac{x}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{y}{a} + \frac{3}{2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

Bei einem gerastert vorliegenden Bild tritt durch dieses Verfahren die Rasterung nicht mehr in Erscheinung. Es verbleibt aber die durch das Rastermaß bedingte Unschärfe.

A Herleitung des Verlaufs der durch Sektorrotation erzeugten kontinuierlichen Intensitätsverteilung

Verlauf im Inneren des Ausgangssektors

Ich betrachte einen Sektor mit der mittleren Intensität Y , der sich von $-a/2$ bis $a/2$ erstreckt, und die benachbarten Intervalle links von $-3a/2$ bis $-a/2$ und rechts von $a/2$ bis $3a/2$. Die verschobene Sektorgrenze liege innerhalb dieses Sektors bei φ_0 . Berechnet werden soll die Intensität an der Position x im Inneren des ursprünglichen Sektors, wie sie durch die Mittelung über die Anteile entsteht, die in alle verschobenen Sektoren fallen und in denen φ liegt.

Dazu sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die neue Sektorgrenze liegt links von der Position φ , also $\varphi_0 < \varphi$. Die Beiträge aller Verschiebungen liefern zusammen im Mittel die Intensität

$$y_1(\varphi) = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{\varphi} Y \frac{a - \varphi_0}{a} d\varphi_0 = \frac{Y}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\varphi}{a} - \left(\frac{\varphi}{a} \right)^2 \right).$$

2. Die neue Sektorgrenze liegt rechts von der Position φ , also $\varphi_0 > \varphi$. Hier sind die Beiträge im Mittel

$$y_2(\varphi) = \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{a/2} Y \frac{\varphi_0}{a} d\varphi_0 = \frac{Y}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{\varphi}{a} - \left(\frac{\varphi}{a} \right)^2 \right).$$

Zusammengenommen ergibt beides

$$y_m(\varphi) = y_1(\varphi) + y_2(\varphi) = Y \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{\varphi}{a} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Verlauf in den beiden benachbarten Flanken

Die neue Sektorgrenze φ_0 kann in der linken Flanke zwischen $-3a/2$ und φ variieren. Dadurch entsteht im linken Nachbarsektor der Verlauf

$$y_1(\varphi) = \frac{1}{a} \int_{-3a/2}^{\varphi} Y \frac{x_0 + \frac{3a}{2}}{a} d\varphi_0 = \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} + \frac{3}{2} \right)^2.$$

In der rechten Flanke erhält man entsprechend

$$y_r(\varphi) = \frac{1}{a} \int_{\varphi}^{3a/2} Y \frac{\frac{3a}{2} - \varphi_0}{a} d\varphi_0 = \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} - \frac{3}{2} \right)^2.$$

Die Ergebnisse für diese drei benachbarten Sektoren sind hier noch einmal zusammengefaßt:

$$\boxed{\begin{aligned} y_l(\varphi) &= \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \\ y_m(\varphi) &= Y \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{\varphi}{a} \right)^2 \right) \\ y_r(\varphi) &= \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \end{aligned}} \quad (13)$$

An den Nahtstellen $\varphi = \pm a/2$ stimmen die Funktionen und auch ihre Ableitungen miteinander überein. Es ist

$$\begin{aligned} y_l\left(-\frac{a}{2}\right) &= y_m\left(\pm\frac{a}{2}\right) = y_r\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Y}{2} \\ y_l'\left(-\frac{a}{2}\right) &= y_m'\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{Y}{a} \\ y_r'\left(-\frac{a}{2}\right) &= y_m'\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{Y}{a} \end{aligned}$$

Es gibt an beiden Stellen also keinen Sprung und keinen Knick im Intensitätsverlauf.

Die Gesamtintensität bleibt bei dem Verfahren der Sektorrotation erhalten, denn es ist

$$\int_{-3a/2}^{-a/2} y_l(\varphi) d\varphi + \int_{-a/2}^{a/2} y_m(\varphi) d\varphi + \int_{a/2}^{3a/2} y_r(\varphi) d\varphi = Y \left(\frac{a}{6} + \frac{2a}{3} + \frac{a}{6} \right) = \int_{-a/2}^{a/2} Y d\varphi = Ya.$$

B Herleitung der durch Pixelverschiebung erzeugten zweidimensionalen Intensitätsverteilung

Intensität innerhalb des ursprünglichen Quadrats

Im ursprünglichen **Quadrat 5** müssen für die Mittelung der Intensitäten aller gegen das ursprüngliche Pixelraster verschobenen Pixel vier Beiträge getrennt betrachtet werden. Für die Intensität als Funktion der Ortskoordinaten x und y ergibt sich als deren Summe

$$\begin{aligned}
 z_5(x, y) &= \frac{Z}{a^4} \left(\int_{x-a}^{-a/2} \int_{y-a}^{-a/2} \left(x_0 + \frac{3a}{2} \right) \left(y_0 + \frac{3a}{2} \right) dy_0 dx_0 \right. \\
 &\quad + \int_{x-a}^{-a/2} \int_{-a/2}^y \left(x_0 + \frac{3a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} - y_0 \right) dy_0 dx_0 \\
 &\quad + \int_{-a/2}^x \int_{y-a}^{-a/2} \left(\frac{a}{2} - x_0 \right) \left(y_0 + \frac{3a}{2} \right) dy_0 dx_0 \\
 &\quad \left. + \int_{-a/2}^x \int_{-a/2}^y \left(\frac{a}{2} - x_0 \right) \left(\frac{a}{2} - y_0 \right) dy_0 dx_0 \right) \\
 &= \frac{Z}{a^4} \left(\int_{x-a}^{-a/2} \left(x_0 + \frac{3a}{2} \right) dx_0 + \int_{-a/2}^x \left(\frac{a}{2} - x_0 \right) dx_0 \right) \\
 &\quad \cdot \left(\int_{y-a}^{-a/2} \left(y_0 + \frac{3a}{2} \right) dy_0 + \int_{-a/2}^y \left(\frac{a}{2} - y_0 \right) dy_0 \right)
 \end{aligned}$$

Damit wird schließlich

$$\boxed{z_5(x, y) = Z \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right)} \quad (14)$$

In der Mitte des ursprünglichen Quadrat reduziert sich der Wert dadurch von Z auf

$$z_5(0,0) = \frac{9}{16} Z$$

und an seinen Ecken auf

$$z_5\left(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right) = \frac{Z}{4}.$$

Am linken Rand ist der Verlauf eine nach unten geöffnete Parabel:

$$z_5\left(-\frac{a}{2}, y\right) = \frac{Z}{2} \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right).$$

Intensität außerhalb des ursprünglichen Quadrats

Im **Quadrat 4** ergibt die Mittelung der Intensitäten aller gegen das ursprüngliche Pixelraster verschobenen gleichgroßen Quadrate die Intensität

$$z_4(x, y) = \frac{Z}{a^4} \underbrace{\int_{-3a/2}^x \left(\frac{3a}{2} + x_0 \right) dx_0}_{z_{41}(x)} \left(\underbrace{\int_{y-a}^{-a/2} \left(\frac{3a}{2} + y_0 \right) dy_0}_{z_{42}(y)} + \underbrace{\int_{-a/2}^y \left(\frac{a}{2} - y_0 \right) dy_0}_{z_{43}(y)} \right)$$

Darin ist

$$\begin{aligned} z_{41}(x) &= \frac{1}{2} [3ax_0 + x_0^2]_{-3a/2}^x = \frac{1}{2} \left(\frac{3a}{2} + x \right)^2 \\ z_{42}(y) &= \frac{1}{2} [3ay_0 + y_0^2]_{y-a}^{-a/2} = \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{a}{2} \right)^2 - ay - y^2 \right) \\ z_{43}(y) &= \frac{1}{2} [ay_0 - y_0^2]_{-a/2}^y = \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{a}{2} \right)^2 + ay - y^2 \right) \end{aligned}$$

Damit erhält man als Intensitätsverlauf im Quadrat 4

$$\boxed{z_4(x, y) = \frac{Z}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{a} \right)^2 \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right)} \quad (15)$$

An seiner rechten Kante hat das Quadrat den Intensitätsverlauf

$$z_4\left(-\frac{a}{2}, y\right) = \frac{Z}{2} \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y}{a}\right)^2 \right).$$

An der unteren Ecke ist der Wert

$$z_4\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) = \frac{Z}{4}.$$

Im **Quadrat 7**, also einem Quadrat an der Ecke des Ausgangsquadrats, gilt

$$z_7(x, y) = \frac{Z}{a^4} \int_{-3a/2}^x \left(x_0 + \frac{3a}{2}\right) dx_0 \int_{-3a/2}^y \left(y_0 + \frac{3a}{2}\right) dy_0$$

Dies ergibt

$$\boxed{z_7(x, y) = \frac{Z}{4} \left(\frac{x}{a} + \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{y}{a} + \frac{3}{2}\right)^2} \quad (16)$$

An der Ecke des ursprünglichen Pixels ist dies gleich

$$z_7\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right) = \frac{Z}{4}.$$

Normierung des modifizierten Intensitätsverlaufs

Die neue Gesamtintensität stimmt mit der vorgegebenen Gesamtintensität, also dem Integral I über das Ausgangsquadrat

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} Z dx dy = Z a^2$$

überein. Die neue Gesamtintensität setzt sich aus den Integralen I_5 über das mittlere Quadrat 5 sowie vier Integralen I_4 über die Quadrate vom Typ 4 und

vier Integralen I_7 über die Quadrate vom Typ 7 zusammen. Man erhält

$$\begin{aligned}
 I_5 &= Z \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) dx \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right) dy = Z \left(\frac{2a}{3} \right)^2 \\
 I_4 &= \frac{Z}{2} \int_{-3a/2}^{a/2} \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{a} \right)^2 dx \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) dy = Z \left(\frac{a}{3} \right)^2 \\
 I_7 &= \frac{Z}{4} \int_{-3a/2}^{a/2} \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{a} \right)^2 dx \int_{-3a/2}^{a/2} \left(\frac{3}{2} + \frac{y}{a} \right)^2 dy = Z \left(\frac{a}{6} \right)^2
 \end{aligned}$$

Zusammen ergeben die Integrale

$$I_{\text{gesamt}} = I_5 + 4(I_4 + I_7) = \left(\frac{4}{9} + 4 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{36} \right) \right) Z a^2 = Z a^2,$$

also den ursprünglichen Wert.

C Inversion der Matrix L

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 97 & -26 & 7 & -2 & 1 & -2 & 7 & -26 \\ -26 & 97 & -26 & 7 & -2 & 1 & -2 & 7 \\ 7 & -26 & 97 & -26 & 7 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -26 & 97 & -26 & 7 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & -26 & 97 & -26 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 7 & -26 & 97 & -26 & 7 \\ 7 & -2 & 1 & -2 & 7 & -26 & 97 & -26 \\ -26 & 7 & -2 & 1 & -2 & 7 & -26 & 97 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Die Inversion läßt sich u. a. mit WolframAlpha berechnen.

D Vergleich der Glättung per Sektorrotation (S) und per ein Faltung (F)

Geglättet durch Faltung:

$$f_{\text{links}}(t) = \frac{a+t)^2}{2} \quad (18)$$

$$f_{\text{mitte}}(t) = \frac{a^2}{2} + at - t^2 \quad (19)$$

$$f_{\text{rechts}}(t) = \frac{(2a-t)^2}{2} \quad (20)$$

Geglättet durch Sektorrotation:

$$f_{\text{links}}(\varphi) = \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} + \frac{3}{2} \right)^2 \quad (21)$$

$$f_{\text{mitte}}(\varphi) = Y \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{\varphi}{a} \right)^2 \right) \quad (22)$$

$$f_{\text{rechts}}(\varphi) = \frac{Y}{2} \left(\frac{\varphi}{a} - \frac{3}{2} \right)^2 \quad (23)$$

Mit den Ersetzungen

$$\varphi \rightarrow t \quad (24)$$

$$a \rightarrow 1 \quad (25)$$

$$Y \rightarrow 1 \quad (26)$$

$$x \rightarrow x - \frac{a}{2} \quad (27)$$

werden aus den unteren drei Gleichungen die oberen drei, was zu zeigen war.