Schiefer Wurf

Günter Green

20. März 2023

Einleitung

Ein Körper (Ball oder Geschoß) der Masse m werde am Ort

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix}$$

schräg nach oben geschossen. Seine Flugbahn soll bestimmt werden, aus der sich Gipfelhöhe, Reichweite und Flugdauer ergeben.

Herleitung

Nach Abschuß in der Höhe $z = z_0 = 0$ zur Zeit $t = t_0 = 0$ gilt für den Körpers der Masse m wegen der Impulserhaltung

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{g} \quad \text{mit} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x)t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{g}t$$

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2}\,t^2 + \vec{v}_0 t$$

bzw. komponentenweise

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x}(t) = v_{x,0} \quad \rightarrow \quad x(t) = \dot{x}_0 t$$
$$\ddot{z}(t) = -g \quad \rightarrow \quad \dot{z}(t) = -gt + v_{z,0} \quad \rightarrow \quad z(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \dot{z}_0(t - t_0).$$

Im Maximum der Bahn ist

$$\dot{z} = -gt + \dot{z}_0 = 0.$$

Es wird erreicht zur Zeit

$$t_{\max} = \frac{\dot{z}_0}{g}$$

bei

$$x_{\max} = \dot{x}_0 t_{\max} = \frac{\dot{x}_0 \dot{z}_0}{g}$$

und hat dort die Höhe

$$z_{\max} = \frac{\dot{z}_0^2}{2g}.$$

Danach fällt der Körper zurück und erreicht die Ausgangshöhe $z_0 = 0$ zur Zeit

$$t_1 = \frac{2\dot{z}_0}{g} = 2\, t_{\max}.$$

bei

$$x_1(\alpha) = \frac{2\dot{z}_0}{g}\dot{x}_0 = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha$$
$$= \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha).$$

Die Reichweite hängt also vom Winkel α ab, unter dem der Körper abfliegt. Am weitesten fliegt der Körper, wenn als Abflugwinkel $\alpha = 45°$ gewählt wird, so daß $\sin(2\alpha) = 1$ ist.

Damit ergibt sich die größte Reichweite als

$$x_{1\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Halliday nennt das gleiche Ergebnis in seiner Gleichung (4-26). Bei einer Abfluggeschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s käme der Körper damit etwa 10 cm weit.

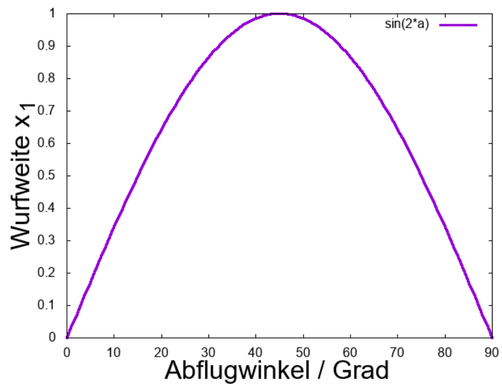

Abbildung 1: Wurfweite $x_1(\alpha)$ als Funktion des Abflugwinkels α

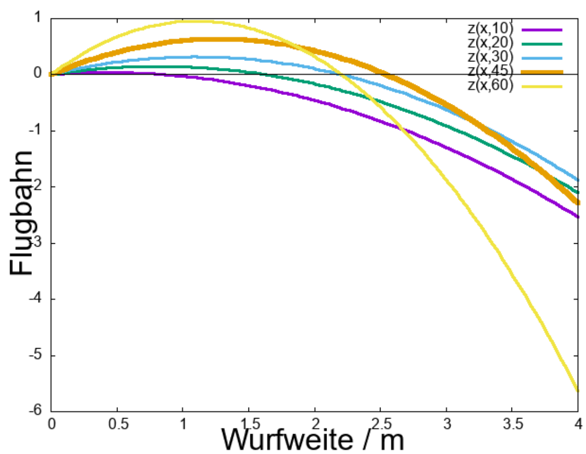

Abbildung 2: Ein Körper werde bei $x = 0$ mit einer Abfluggeschwindigkeit v_0 unter verschiedenen Winkeln, nämlich 10°, 20°, 30°, 45° und 60° schräg aufwärts geworfen bzw. geschossen. Auf einer Parabelbahn erreicht er nach dem Maximum wieder die Abflughöhe mit der größten Wurfweite x_{1max} bei 45°.

Umgekehrt ließe sich aus einer empirisch ermittelten maximalen Reichweite $x_{1\max}$ eines Körpers seine Abfluggeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{g x_{1\max}}$$

berechnen.